UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Geometría y Topología

TESIS DOCTORAL

Teoría del grado topológico generalizado y aplicaciones

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Francisco Romero Ruiz del Portal

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Geometria y Topología

TEORIA DEL GRADO TOPOLOGICO GENERALIZADO Y APLICACIONES

Francisco Romero Ruiz del Portal

Colección Tesis Doctorales. N.º 313/91

ISBN X-53-006011-5

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía.
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria.
Madrid, 1991.
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-42070-1991

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

TEORIA DEL GRADO TOPOLOGICO GENERALIZADO Y APLICACIONES

Memoria presentada para optar al grado de doctor por

Francisco Romero Ruiz del Portal.

Dirigida por D. Enrique Outerelo Domínguez

Doctor en Ciencias Matemáticas

Catedrático de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la U.C.M.

Madrid, Marzo, 1990

AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas que de una manera u otra me han ayudado a la elaboración de este trabajo, bien sea mediante la valiosa aportación de sus conocimientos matemáticos, sus opiniones o simplemente mediante sus ánimos, en momentos en los que la moral estaba baja.

Quiero mostrar mi agradecimiento a los profesores que han impartido los cursos de doctorado que cursé, por su interés así como su total disposición para toda consulta que he deseado formularles. Mi más profunda gratitud al Profesor Outerelo, además, director de esta Memoria, por sus consejos y la gran cantidad de su valioso tiempo que me ha dedicado.

Finalmente agradecer también a mi familia su apoyo e interés en todo momento.

INDICE

Introducción I

Capítulo 0 1

0.0 Notaciones previas 1

0.1 Homotopía. Grupos de homotopía y de cohomotopía · 3

0.2 Variedades diferenciables 10

0.3 Fibrados vectoriales 19

-Fibrado vectorial imagen inversa 21

-Subfibrados vectoriales. Fibrados vectoriales cocientes 24

-Fibrados tangente de una variedad diferenciable y fibrado normal a una subvariedad de la misma ·· 26

0.4 Entornos tubulares 30

0.5 Variedades orientables. Grado en variedades orientadas 32

0.6 Variedades normalmente referenciadas y teoría de homotopía 35

-Invariante de Hopf de aplicaciones continuas de S^{2k+1} en S^{k+1} 40

-Aplicación de Hopf de la 3-esfera en la 2-esfera 44

Capítulo I. Grado generalizado ··· 45

I.0 Introducción ··· 45

I.1 Una construcción alternativa del grado generalizado ··· 49

-Coincidencia con el grado generalizado de Geba, Massabó y Vignoli ··· 53

-Invariancia por difeomorfismos ··· 57

-Discusión de la propiedad aditiva ··· 61

I.2 Grado generalizado de aplicaciones propias ··· 67

Capítulo II. Grado generalizado en espacios vectoriales reales normados ··· 71

II.1 Grado generalizado para perturbaciones compactas de la proyección $p_2: \mathbb{R}^k \times E \longrightarrow E$ ··· 72

II.2 Grado generalizado para perturbaciones γ-condensantes de la proyección $p_2: \mathbb{R}^k \times E \longrightarrow E$ ··· 87

Capítulo III. Grado generalizado en variedades e invariante de Hopf generalizado ··· 97

III.1 Variedades normalmente referenciadas en variedades riemannianas ··· 99

-La biyección Π^k_n ··· 111

-Estructura de grupo en $\mathfrak{Z}^k(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$ ··· 112

-Los operadores inducidos $\bar{f}^*$ y $(\bar{f}^*)_c$ ··· 118

-El operador coborde $\bar{\delta}$ ··· 120

III.2 Grado generalizado en variedades ··· 124

-Grado generalizado de aplicaciones propias ··· 129

III.3 Condiciones para que el grado generalizado de aplicaciones entre variedades sea un elemento de $\Pi_{n+k}(S^n)$ ········ 140

-El operador ψ^* ········ 143

-π-variedades, los operadores U_f^* ········ 149

-Relación entre los operadores ψ^* y U_f^* ········ 155

III.4 Invariante de Hopf generalizado ········ 161

Capítulo IV. G-Complementación. Número de enlace de esferas ········ 173

IV.1 G-Complementación ········ 174

-Relación entre complementación y G-complementación ········ 176

-Condición suficiente para que una aplicación pueda ser G-complementada ········ 181

-Bifurcación local ········ 191

-Bifurcación global ········ 201

IV.2 Aplicación del grado generalizado al estudio de los números de enlace de esferas ········ 204

Bibliografía ········ 211

INTRODUCCION

Muchos problemas en Matemáticas se pueden reducir al estudio del conjunto de soluciones de la ecuación $f(x)=y$, siendo f una aplicación entre espacios X e Y, obtenidos a partir del problema que se estudia, e y un elemento de Y.

La teoría del grado topológico es una de las herramientas más importantes, conocidas hasta la fecha, para obtener información sobre las soluciones de la ecuación planteada.

Esta teoría se utiliza en demostraciones de resultados topológicos (invariancia del dominio, teorema de separación de Jordan, teoremas del punto fijo, etc.), en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, ecuaciones integrales, teoría de la bifurcación, teoría de juegos y economía matemática.

Los orígenes de la teoría del grado se remontan a las demostraciones del Teorema Fundamental del Algebra dadas por C.F.Gauss en 1799, de cuyas ideas definió L.Kronecker, en 1869, una teoría del índice. Esta teoría se introduce por procedimientos analíticos (mediante una integral). Una construcción completamente nueva de la teoría del grado (con técnicas de topología combinatoria) se debe a L.E.Brouwer en 1912. En 1934 J.Leray y J.Schauder extienden las construcciones anteriores a perturbaciones compactas de la identidad de espacios de Banach. Finalmente en 1973 H.Amann y S.Weiss consiguen una caracterización axiomática de la teoría del grado topológico de Leray-Schauder.

El grado clásico de Brouwer, es una función $d:\{(f,\Omega,y):\Omega$ es un abierto acotado de R^n, $f:\bar{\Omega}\longrightarrow R^n$ es una aplicación continua e

$y\in \mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$, que verifica las siguientes propiedades:

1) $d(Id_{\overline{\Omega}},\Omega,y)=1$ para cada $y\in\Omega$.

2) Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es una aplicación continua y U es un subconjunto abierto de Ω tales que $f(\overline{\Omega}\setminus U)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{y\}$ se verifica que $d(f,\Omega,y)=d(f|_{\overline{U}},U,y)$.

3) Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω y $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es una aplicación continua tales que $f(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1\cup\Omega_2)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{y\}$ se verifica que $d(f,\Omega,y)=d(f|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) + d(f|_{\overline{\Omega}_2},\Omega_2,y)$.

4) Si Ω es un abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es una aplicación continua con $f(\partial\Omega)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{y\}$ y $d(f,\Omega,y)\neq 0$ se verifica que $f^{-1}(y)\neq\emptyset$.

5) Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $H:\overline{\Omega}\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ son aplicaciones continuas tales que $\gamma(t)\notin H(\partial\Omega,t)$ para todo $t\in[0,1]$, se tiene que $d(H_t,\Omega,\gamma(t))$ es independiente de $t\in[0,1]$.

6) Si Ω es un abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, $d(f,\Omega,\cdot)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$.

7) Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas. Sean $\{K_i : i\in I\}$ las componentes conexas acotadas de $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$. Supongamos que $y\notin(g\circ f)(\partial\Omega)$. Entonces, $d(g\circ f,\Omega,y)=\sum_i d(f,\Omega,K_i)\, d(g|_{\overline{K_i}},K_i,y)$, donde solo una cantidad finita de términos son diferentes de cero.

8) Sean Ω_0 y Ω_1 abiertos conexos y acotados de $\mathbb{R}^n$, $\varphi:\overline{\Omega}_0\longrightarrow\overline{\Omega}_1$ un difeomorfismo, $f:\overline{\Omega}_0\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una aplicación continua e $y\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega_0)$. Se tiene que $d(f,\Omega_0,y)=\pm d(f\circ\varphi^{-1},\Omega_1,y)$ dependiendo de que φ conserve o invierta la orientación de $\mathbb{R}^n$.

9) Sean Ω un abierto acotado de R^n, $f,g:\bar{\Omega}\longrightarrow R^n$ aplicaciones continuas tales que $f|_{\partial\Omega}=g|_{\partial\Omega}$ e $y\in R^n\setminus f(\partial\Omega)$. Entonces, $d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y)$.

10) Sean Ω un abierto acotado de R^n, $f:\bar{\Omega}\longrightarrow R^n$ una aplicación continua e $y\in R^n\setminus f(\partial\Omega)$. Entonces, para toda aplicación continua, $g:\bar{\Omega}\longrightarrow R^n$ tal que $\|f(x)-g(x)\|<\text{dist}(y,f(\partial\Omega))$ para todo $x\in\bar{\Omega}$, se verifica que $d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y)$.

Como hemos anticipado, en 1973 H. Amann y S. Weiss demostraron que se puede dar una definición axiomática del grado topológico. Ellos probaron que existe una única función $d:\{(f,\Omega,y):\Omega\subset R^n \text{abierto y acotado}, f:\bar{\Omega}\longrightarrow R^n \text{ aplicación continua } y\in R^n\setminus f(\partial\Omega)\}\longrightarrow Z$ que satisface las propiedades 1,3 y 5 anteriores. La demostración de la existencia no es estándar y se puede recurrir a técnicas de topología diferencial o de topología algebraica para hacerla.

La definición del grado topológico $d(f,\Omega,y)$ para una aplicación continua $f:\bar{\Omega}\longrightarrow R^n$ con $y\in R^n\setminus f(\partial\Omega)$ con técnicas de topología diferencial se realiza esquemáticamente como sigue:

Se considera una aplicación de clase C^∞, $g:\bar{\Omega}\longrightarrow R^n$, tal que y es un valor regular de g y $\|f(x)-g(x)\| < \text{dist}(y,f(\partial\Omega))$ para cada $x\in\bar{\Omega}$. Por tanto, $g(\partial\Omega)\subset R^n\setminus\{y\}$, $g^{-1}(y)$ es un conjunto finito de puntos $\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}\subset\Omega$ y $J(g)(a_i)\neq 0$ para todo $i\in\{1,2,\ldots,r\}$. Se define $d(f,\Omega,y)=d(g,\Omega,y)=\sum_{i=1}^{r}\text{sig}(J(g)(a_i))\in Z$. El grado topológico definido de esta forma verifica las propiedades anteriormente enunciadas.

En cuanto a las definiciones alternativas, usando técnicas de topología algebraica, se pueden realizar mediante los grupos de homología, cohomología o homotopía de esferas. Centrándonos en estos últimos y dados Ω, un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $f:\bar{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, una aplicación continua tal que $0\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ (sin pérdida de generalidad se puede suponer que $y=0$), si p y q son los polos Sur y Norte respectivamente de S^n y $\varphi_n:\mathbb{R}^n\longrightarrow S^n\setminus\{q\}$ la inversa de la proyección estereográfica desde q ($\varphi_n(0)=p$) se tiene que $\tilde{f}=\varphi_n\circ f\circ\varphi_n^{-1}:(\varphi_n(\bar{\Omega}),\partial\varphi_n(\Omega))\longrightarrow(S^n\setminus\{q\},S^n\setminus\{p,q\})$, en consecuencia, se puede extender $\tilde{f}$ a una aplicación continua $\hat{f}:S^n\longrightarrow S^n$ de forma que $\hat{f}(S^n\setminus\varphi_n(\Omega))\subset S^n\setminus\{p\}$. Por tanto, $[\hat{f}]\in\Pi_n(S^n)$ no depende de la extensión $\hat{f}$ de $\tilde{f}$ elegida y se define el grado de f en Ω, $d(f,\Omega)$, como $[\hat{f}]\in\Pi_n(S^n)$. En virtud del isomorfismo $\varphi:\Pi_n(S^n)\longrightarrow\mathbb{Z}$ tal que $\varphi(Id_{S^n})=1$ se puede considerar $d(f,\Omega)$ como un elemento de $\mathbb{Z}$. Es fácil comprobar que con esta definición también se verifican las propiedades 1,3 y 5 anteriores. Del teorema de unicidad de Amann y Weiss se concluye la coincidencia de las construcciones indicadas.

Esta última idea fue aprovechada por K.Geba, I.Massabó y A.Vignoli en 1986 en su artículo "*Generalized topological degree and bifurcation*" [15] para generalizar el grado topológico a aplicaciones continuas definidas sobre la adherencia de un subconjunto abierto y acotado Ω de $\mathbb{R}^{n+k}$ y con valores en $\mathbb{R}^n$ que no se anulan en $\partial\Omega$. Siguiendo un razonamiento análogo al anterior se define el grado generalizado de una aplicación continua $f:\bar{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ con $0\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$, $d(f,\Omega)$, como un elemento de $\Pi_{n+k}(S^n)$. Con esta construcción los autores antes mencionados probaron que se verifican las propiedades de escisión, solución e invariancia por homotopías. Además se demostró que la propiedad aditiva se cumple si $n\geq k+4$ aunque no se consiguió dar una respuesta satisfactoria en el caso general.

Por otra parte, L.Pontryagin había caracterizado los grupos

$\Pi_{n+k}(S^n)$ por técnicas de topología diferencial mediante las subvariedades normalmente referenciadas de R^{n+k}, [29]:

Una k-subvariedad normalmente referenciada de R^{n+k} es un par (M^k,F) donde M^k es una subvariedad compacta de R^{n+k} y $F=\{u_1,\dots,u_n\}$ es una familia de secciones de clase C^∞ linealmente independientes del fibrado normal de M^k en R^{n+k}. Dos k-variedades normalmente referenciadas de R^{n+k}, (M_0,F_0) y (M_1,F_1), se dice que son homólogas, si existe una subvariedad compacta M^{k+1} de $R^{n+k}\times[0,1]$ y existe $G=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ familia de secciones de clase C^∞ linealmente independientes del fibrado normal de M^{k+1} en $R^{n+k}\times[0,1]$ tales que:

1) $\partial M^{k+1}=M_0\times\{0\}\cup M_1\times\{1\}$.

2) $M^{k+1}\cap(R^{n+k}\times\{t\})=M_0\times\{t\}$ para cada $t\in[0,1/3)$ y $M^{k+1}\cap(R^{n+k}\times\{t\})=M_1\times\{t\}$ para cada $t\in(2/3,1]$.

3) $G|_{M_0\times\{0\}}=F_0$ y $G|_{M_1\times\{t\}}=F_1$.

Esta relación de homología es una relación de equivalencia y permite definir el conjunto $\mathfrak{J}_c^k(R^{n+k})$ como el conjunto cociente cuyos elementos son las clases de equivalencia, por homología, de las k-subvariedades compactas normalmente referenciadas de R^{n+k}.

L. Pontryagin demostró que existe una aplicación biyectiva $\Pi_n^k:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\mathfrak{J}_c^k(R^{n+k})$ definida por $\Pi_n^k([f])=[((g\circ\varphi_{n+k})^{-1}(p),F_{g\circ\varphi_{n+k}})]$ donde $\varphi_{n+k}:R^{n+k}\longrightarrow S^{n+k}\setminus\{q'\}$ es la inversa de la proyección estereográfica desde el polo Norte q' de S^{n+k}, $g:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ es una aplicación de clase C^∞ homótopa a f, con p valor regular de g y $q'\notin g^{-1}(p)$ y $F_{g\circ\varphi_{n+k}}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ es una referencia normal de $(g\circ\varphi_{n+k})^{-1}(p)$ en R^{n+k} tales que $D(\varphi_{n+k}^{-1}\circ g\circ\varphi_{n+k})(x)(u_j(x))=e_j$ para cada $x\in(g\circ\varphi_{n+k})^{-1}(p)$ y cada $j\in\{1,2,\dots,n\}$ siendo $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ la base canónica de R^n.

Además, L.Pontryagin dio una estructura de grupo a $\mathfrak{F}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})$ de forma que Π_n^k es un isomorfismo. Este punto de vista nos ha permitido dar, en el capítulo I de esta Memoria, una definición alternativa del grado generalizado para aplicaciones continuas $f:\bar{\Omega}\subset\mathbb{R}^{n+k}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ $0\notin f(\partial\Omega)$, mediante técnicas de topología diferencial.

Siguiendo un proceso de aproximación análogo al anteriormente expuesto para establecer la versión diferencial de la definición del grado topológico de Brouwer, dada una aplicación continua $f:\bar{\Omega}\subset\mathbb{R}^{n+k}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $0\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ se define $d(f,\Omega)=d(g,\Omega)=(\Pi_n^k)^{-1}[(g^{-1}(0),F_g)]\in\Pi_{n+k}(S^n)$, donde $g:\bar{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es una aplicación de clase C^∞, 0 es un valor regular de g y $\|f(x)-g(x)\|<\mathrm{dist}(0,f(\partial\Omega))$ para todo $x\in\bar{\Omega}$. Se demuestra que esta definición y la dada por K.Geba, I.Massabo y A.Vignoli coinciden. Esta nueva forma de obtener el grado generalizado presenta numerosas ventajas, entre ellas cabe destacar el estudio de la propiedad aditiva e invariancia por difeomorfismos con una mayor precisión. En este sentido queremos resaltar que considerando la estructura de grupo de $\mathfrak{F}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})$ hemos podido demostrar que la propiedad aditiva se verifica si $n\geq k+2$ a partir de la relación que probamos que existe entre la inyectividad del homomorfismo suspensión $\Sigma:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ y que se cumpla dicha propiedad (PROP. I.1.12 y COROLARIO I.1.13). Además, también demostramos que la acotación $n\geq k+2$ es la mejor posible y se dan ejemplos en los que la propiedad aditiva no se cumple, para dimensiones arbitrariamente altas (EJEMPLO I.1.14).

En cuanto a la propiedad de invariancia por difeomorfismos, se da un ejemplo en el que la propiedad no se cumple (I.1.10) y se dan condiciones suficientes para que se verifique (PROP.

I.1.11). Este hecho es de vital importancia para una posterior extensión del grado generalizado a aplicaciones definidas en espacios vectoriales normados de dimensión infinita.

El capítulo I finaliza extendiendo la definición del grado generalizado para aplicaciones propias $f:\bar{\Omega}\longrightarrow R^{n}$, donde Ω es un abierto de R^{n+k} y $o\notin f(\partial\Omega)$, siguiendo el proceso estándar utilizado para extender el grado de Brouwer a este tipo de aplicaciones. Esta extensión también nos ha sido útil para trabajar, en el capítulo II, con la mayor generalidad posible.

Como en un principio se ha indicado en 1934 J.Leray y S.Schauder extendieron la definición del grado topológico para perturbaciones compactas de la identidad de espacios de Banach. Para ello se utilizan aproximaciones finito-dimensionales de dichas aplicaciones compactas. Posteriormente se ha ampliado la definición para clases mas generales de aplicaciones (perturbaciones γ-condensantes de la identidad de espacios de Banach etc.) y de espacios (localmente convexos). El capítulo II se dedica a la definición, siguiendo sendas semejantes a las anteriormente citadas, y estudio de las propiedades del grado generalizado en espacios normados de dimensión infinita. Dado un espacio normado E, un abierto Ω de $R^{k}\times E$ tal que $p_{1}(\Omega)$ es acotado y $f:\bar{\Omega}\longrightarrow E$ una aplicación continua de la forma $f(\lambda,x)=x-F(\lambda,x)$ con $F:\bar{\Omega}\longrightarrow E$ aplicación compacta, se define el grado de f en Ω, $d(f,\Omega)$ como un elemento de Π_{k} (el k-ésimo grupo estable de homotopía de S^{0}) y además este grado verifica las propiedades de escisión, solución, invariancia por homotopías y aditividad en toda su generalidad. Posteriormente , mediante los resultados obtenidos en estas condiciones y siguiendo el procedimiento que se usa para extender el grado de Leray-Schauder a las perturbaciones

γ-condensantes de la identidad en espacios de Banach se amplía la clase de aplicaciones para las que definimos el grado generalizado:

Dado un espacio de Banach E, $\Omega \subset \mathbb{R}^k \times E$ un subconjunto abierto con $p_1(\Omega)$ acotado y $f:\bar{\Omega} \longrightarrow E$ una aplicación continua tal que $f(\lambda,x)=x-F(\lambda,x)$ donde $F:\bar{\Omega} \longrightarrow E$ es una aplicación γ-condensante se tiene igualmente definido $d(f,\Omega)\in \Pi_k$ y se cumplen las mismas propiedades que en el caso anterior.

Una generalización obvia de las definiciones y resultados desarrollados por L.Pontryagin en [29] a los que ya nos hemos referido, permite, sustituyendo S^{n+k} por una variedad riemanniana compacta, sin borde, orientada, de dimensión n+k, M^{n+k}, definir los conceptos de k-subvariedad normalmente referenciada de M^{n+k} así como la relación de equivalencia de homología entre ellas para obtener el conjunto cociente asociado $\mathfrak{F}^k(M^{n+k})$. Además, en estas condiciones tambien se tiene una aplicación biyectiva

$$\Pi_n^k : [M^{n+k}, S^n] \longrightarrow \mathfrak{F}^k(M^{n+k})$$

definida de manera análoga al caso $S^{n+k}=M^{n+k}$, esto es: dada una aplicación continua $f:M^{n+k} \longrightarrow S^n$, $\Pi_n^k([f])=[(g^{-1}(p),F_g)]$ donde g es una aplicación de clase C^∞ homótopa a f, p es un valor regular de g y $F_g=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ es una referencia normal para $g^{-1}(p)$ tal que $T_xg(u_j(x))=\theta_c^p(e_j)$ para cada $x\in g^{-1}(p)$ y $j\in\{1,2,\dots,n\}$, siendo $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ una carta de la orientación usual de S^n con $p\in U$.

Usando estas ideas, en el párrafo 1 del capítulo III, si ahora M^{n+k} es una variedad riemanniana, orientada, de dimensión n+k, posiblemente con borde ,se definen los siguientes conjuntos:

S.N.R.$(M^{n+k})=\{(M^k,F):M^k$ es una subvariedad sin borde y cerrada de M^{n+k}, contenida en el interior de M^{n+k}, y F es una referencia normal para M^k} y $S.N.R._c(M^{n+k})=\{(M^k,F)\in S.N.R.(M^{n+k})$ y M^k es compacta}.

Se dice que dos elementos (M_0^k,F_0) y (M_1^k,F_1) de $S.N.R.(M^{n+k})$ (resp. de $S.N.R._c(M^{n+k})$) son homólogos si existe una subvariedad cerrada (resp. compacta) M^{k+1} de dimensión k+1, contenida en $Int(M^{n+k})x[0,1]$ tal que $\partial M^{k+1}=M_0^k x\{0\}\cup M_1^k x\{1\}$ y además $M^{k+1}\cap(Int(M^{n+k})x\{t\})=M_0^k x\{t\}$ para cada $t\in[0,1/3)$, $M^{k+1}\cap(Int(M^{n+k})x\{t\})=M_1^k x\{t\}$ para cada $t\in(2/3,1]$ y existe G, referencia normal para M^{k+1}, tal que $G|_{M_0^k x\{0\}}=F_0$ y $G|_{M_1^k x\{1\}}=F_1$. Ambas relaciones son de equivalencia y permiten obtener los conjuntos cocientes $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ y $\mathfrak{F}_c^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$.

Tambien en esta situación se tiene una aplicación biyectiva $\Pi_n^k\colon [M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]\longrightarrow\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ dada por $\Pi_n^k([f])=[(g^{-1}(p),F_g)]$ donde $g\colon(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ es una aplicación de clase C^∞, homótopa a f, (por una homotopía continua $H\colon(M^{n+k}xI,\partial M^{n+k}xI)\longrightarrow(S^n,q)$) con p valor regular de g y F_g es la referencia normal para $g^{-1}(p)$, $F_g=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ tal que $T_xg(u_j(x)=\theta_c^p(e_j)$ para cada $x\in g^{-1}(p)$ y $j\in\{1,2,\dots,n\}$ siendo $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ una carta de la orientación usual de S^n con $p\in U$.

Es bien conocido que si M^{n+k} es compacta y $n\geq k+2$ el conjunto $[M^{n+k},\partial M^{n+k};\ S^n,q]$ puede ser dotado de una estructura de grupo abeliano, el n-ésimo grupo de cohomotopía del par $(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ denotado por $\Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k})$. En nuestro caso, aunque M^{n+k} no sea compacta si $n\geq k+2$ observamos que haciendo leves modificaciones en las demostraciones dadas en [32] también es posible dotar al conjunto $[M^{n+k},\partial M^{n+k};\ S^n,q]$ de una estructura de grupo abeliano que seguimos denotando por $\Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ además se define una operación en $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ mediante la suma de variedades de forma que $\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ es un grupo abeliano y Π^k_n es un isomorfismo. Es pues conveniente dar descripciones de los morfismos que se utilizan en la teoría de cohomotopía en términos de k-variedades normalmente referenciadas. En este sentido, dadas dos variedades orientadas M^{n+k} y N^{n+s} y una aplicación continua $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ se define una aplicación $\bar{f}^*:\mathfrak{J}^s(N^{n+s},\partial N^{n+s})\longrightarrow\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ (que es un homomorfismo si los conjuntos anteriores son grupos) de forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Pi^n(N^{n+s},\partial N^{n+s}) & \xrightarrow{f^*} & \Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \\
\Pi^s_n \downarrow & & \downarrow \Pi^k_n \\
\mathfrak{J}^s(N^{n+s},\partial N^{n+s}) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & \mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})
\end{array}$$

es conmutativo, (PROP. III.1.12). En el caso de ser f una aplicación propia se define una función $\bar{f}^*_c:\mathfrak{J}^s_c(N^{n+s},\partial N^{n+s})\longrightarrow\mathfrak{J}^k_c(M^{n+k},\partial M^{n+k})$.

Por otra parte tambien se encuentra una descripción del operador coborde $\delta:\Pi^{n-1}(\partial M^{n+k})\longrightarrow\Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ mediante la definición de un operador $\bar{\delta}:\mathfrak{J}^k(\partial M^{n+k})\longrightarrow\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Pi^{n-1}(\partial M^{n+k}) & \xrightarrow{\delta} & \Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \\
\Pi^{k-1}_n \downarrow & & \downarrow \Pi^k_n \\
\mathfrak{J}^k(\partial M^{n+k}) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})
\end{array}$$

es conmutativo (PROP. III.1.14). Ambas descripciones han sido de interés para el posterior estudio de las propiedades del grado generalizado en variedades, en especial la del operador coborde ,a partir de la cual se han conseguido dar condiciones suficientes para que una aplicación diferenciable pueda ser G-complementada.

Históricamente, también se ha desarrollado una teoría del grado en variedades. Su construcción no requiere ideas esencialmente nuevas a las introducidas para definir el grado topológico de Brouwer desde el punto de vista de la topología diferencial. Dadas M^n y N^n dos variedades diferenciables orientadas, compactas, sin borde, de dimensión n, N^n conexa y dada una aplicación continua $f:M^n \longrightarrow N^n$, se define el grado de f, que se denotará por $d(f)$, como $d(f)=\sum_{i=1}^{r}$ signo $\det D(\psi\circ g\circ\varphi_i^{-1})(\varphi_i(a_i))$ donde $g:M^n \longrightarrow N^n$ es una aplicación de clase C^∞ homótopa a f, $\{a_1,a_2,\dots,a_r\}=g^{-1}(x_0)$ con x_0 un valor regular cualquiera de g, $c_i=(U_i,\varphi_i,\mathbb{R}^n)$ son cartas de la orientación de M^n con $a_i\in U_i$ para cada $i\in\{1,2,\dots,r\}$ y $c=(V,\psi,\mathbb{R}^n)$ es una carta de la orientación de N^n con $x_0\in V$.

Las propiedades mas importantes que verifica el grado en variedades son las siguientes:

1) Si $H:M^n\times[0,1] \longrightarrow N^n$ es una aplicación continua, se tiene que $d(H_0)=d(H_1)$.

2) Si $f:M^n \longrightarrow N^n$ es una aplicación continua y $d(f)\neq 0$ entonces, f es sobreyectiva.

3) Si $M^n=\partial M^{n+1}$, donde M^{n+1} es una variedad compacta de dimensión n+1, y $f:M^{n+1} \longrightarrow N^n$ es una aplicación continua se tiene que $d(f|_{M^n})=0$.

4)Sean $f,g:M^n \longrightarrow S^n$ dos aplicaciones continuas. Se verifica que $d(f)=d(g)$ si y solamente si f y g son homótopas, es decir, $d(f)$ caracteriza la clase de homotopía de f.

Usando las propiedades que verifica el conjunto de aplicaciones propias $f:M^n \longrightarrow N^n$, con las topologías de Whitney, es posible extender las construcciones anteriores para obtener una teoría del grado para aplicaciones propias $f:M^n \longrightarrow N^n$ donde ahora M^n y N^n son variedades orientadas, sin borde de dimensión n y N^n es conexa.

En el párrafo 2 del capítulo III se construye una teoría del grado generalizado para aplicaciones continuas $f:M^{n+k} \longrightarrow M^n$ donde M^{n+k} y M^n son variedades riemannianas orientadas de dimensiones n+k y n respectivamente y M^n es conexa ,y para las aplicaciones propias $g:M^{n+k} \longrightarrow M^n$. Utilizando los resultados obtenidos en el primer párrafo se sigue un camino completamente natural:

Dada $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \longrightarrow (M^n, M^n \setminus \{x_0\})$ una aplicación de clase C^∞ tal que x_0 es valor regular de f, se define el grado generalizado de f en x_0 , $d(f,x_0)=[(f^{-1}(x_0),F_f)]\in \mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ donde $F_f=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ es la referencia normal de $f^{-1}(x_0)$ tal que $T_xf(u_j(x))=\theta_c^x o(e_j)$ para todo $x\in f^{-1}(x_0)$ y todo $j\in\{1,2,\dots,n\}$, siendo $c=(U,\varphi,R^n)$ una carta de la orientación de M^n con $x_0\in U$. Se tiene que $d(f,x_0)$ no depende de la carta c de la orientación de M^n que se elija. Además si f y g son aplicaciones de clase C^∞, tales que x_0 es valor regular de ambas y son homótopas por una homotopía $H:(M^{n+k}\times[0,1],\partial M^{n+k}\times[0,1]) \longrightarrow (M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ se verifica que $d(f,x_0)=d(g,x_0)$. Por tanto, si $\partial M^{n+k}=\emptyset$ y $f:M^{n+k} \longrightarrow M^n$ es una aplicación continua se puede definir el grado de f, $d(f)$, como $d(g,x_0)\in\mathfrak{J}^k(M^{n+k})$ siendo $g:M^{n+k} \longrightarrow M^n$ una aplicación de clase C^∞ homótopa a f y x_0 un valor regular cualquiera de g. Posteriormente se demuestra la propiedad de invariancia por homotopías y con la descripción de los homomorfismos f^*, a los que antes nos referimos, en términos de variedades, se tiene lo que podría ser considerado como un teorema de multiplicación para este grado en variedades, (PROP. III.2.8). También se estudia el caso en el que las aplicaciones sean propias, definiendo de manera similar al caso general un grado en el que $d(g)\in\mathfrak{J}^k_c(M^{n+k})$ para cada aplicación propia $g:M^{n+k}\longrightarrow M^n$. Se tiene el teorema de multiplicación análogo en términos de los operadores $\overline{f}^*_c$.

Por otra parte y mediante la descripción del operador coborde en términos de variedades se dan condiciones suficientes para que se cumpla la propiedad 3 para el grado generalizado (PROP. III.2.17).

Las construcciones anteriores, tanto en el caso general como en el caso de aplicaciones propias, presentan diversos inconvenientes como lo son su cálculo y sobre todo que este grado al estar definido como un elemento de $\mathfrak{J}^k(M^{n+k})$ o de $\mathfrak{J}^k_c(M^{n+k})$, depende de la variedad M^{n+k} en contraposición con lo que ocurre en el grado clásico en el que el grado de una aplicación continua es siempre un elemento de Z, independientemente de cual sea la variedad M^n. En el párrafo 3 del capítulo III se afronta este problema y se estudian las condiciones en las que el grado generalizado pueda ser considerado como un elemento de un grupo de homotopía de una esfera. En este sentido es preciso destacar que Kervaire ya definió en [21] un operador entre $\mathfrak{J}^k(M^{n+k})$ y $\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$ para algún $s\geq 0$ cuando M^{n+k} es una π-variedad compacta. Una π-variedad es una variedad de clase C^∞ tal que existe una inmersión difeomórfica de clase C^∞ $f:M^{n+k}\longrightarrow R^{n+k+s}$ tal que $f(M^{n+k})$ tiene fibrado normal trivializable en R^{n+k+s}. En estas condiciones, dada una π-variedad compacta M^{n+k}, una inmersión difeomórfica $f:M^{n+k}\longrightarrow R^{n+k+s}$ y $U=\{u_1,u_2,\dots,u_s\}$ una referencia normal para $f(M^{n+k})$, Kervaire definió un operador (que será un homomorfismo si $n\geq k+2$) que denotaremos por $U_f^*:\mathfrak{J}^k(M^{n+k})\longrightarrow\mathfrak{J}^k(S^{n+k+s})$. En principio, este operador depende de f y de U pero se demostró que si $n\geq k+2$ y M^{n+k} es k-conexa U_f^* no depende, salvo signo, ni de la inmersión f, ni de la referencia normal U elegidos. Por tanto, si M^{n+k} es una π-variedad compacta, sin borde, k-conexa y $n\geq k+2$ es natural entender el grado generalizado de una aplicación continua $g:M^{n+k}\longrightarrow M^n$, como su imagen por el homomorfismo U_f^*. No obstante, esta interpretación requiere, para el estudio de las propiedades que verifica el grado generalizado, un conocimiento profundo del comportamiento de los operadores U_f^*. Con este fin y también para el tratamiento de la G-complementación a la que nos referimos en el capítulo IV, definimos, de forma análoga, operadores que continuamos denotando por $U_f^*:\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$ donde M^{n+k} es una π-variedad compacta, posiblemente con borde e introducimos, para cada carta $c=(V,\psi,R^{n+k})$ de la orientación de M^{n+k} con $V\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$, una aplicación $\psi^*:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ que es un homomorfismo si $n\geq k+2$. Se verifica que ψ^* no depende de la carta de M^{n+k} elegida (PROP.III.3.3). Además ψ^* tiene propiedades muy interesantes si $\partial M^{n+k}=\emptyset$:

a) Si M^{n+k} es k-conexa y $n\geq k+2$, se tiene que ψ^* es un epimorfismo (PROP.III.3.5), y por tanto, si k=1 y M^{n+1} es simplemente conexa, eliminando el caso trivial en el que $\Pi^n(M^{n+1})=0$, se puede identificar el grado generalizado de una aplicación continua $g:M^{n+1}\longrightarrow M^n$ como un elemento de $\Pi_{n+1}(S^n)$. Además en este caso si $M^n=S^n$ el grado generalizado caracteriza la clase de homotopía de g. Este argumento es igualmente válido si M^{n+k} es k-conexa y $\Pi_{n+k}(S^n)\approx Z_2$.

b) Si M^{n+k} es una π-variedad compacta con $n\geq k+2$, $f,g:M^{n+k}\longrightarrow R^{n+k+s}$ son dos inmersiones difeomórficas tales que $f(M^{n+k})$ y $g(M^{n+k})$ tienen fibrados normales trivializables en R^{n+k+s} y si U y U' son referencias normales para $f(M^{n+k})$ y $g(M^{n+k})$ respectivamente, se tiene que $U_f^{\bullet}|_{\mathrm{Im}\psi^{\bullet}} = U_g'^{\bullet}|_{\mathrm{Im}\psi^{\bullet}}$ supuesto que $s\geq n+k+2$ (PROP. III.3.10) de lo que posteriormente se deduce que la composición $U_f^{\bullet}\circ\psi^{\bullet}:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$ coincide con Σ^s, salvo signo, (COROLARIO III.3.12).

Las consecuencias que se obtienen de los anteriores resultados son diversas. Cabría destacar que, en las mismas condiciones, se tiene que $\psi^{\bullet}$ es monomorfismo y $U_f^{\bullet}$ es epimorfismo (sobre todo este último hecho nos ha sido de gran utilidad para encontrar condiciones suficientes en el problema de la G-complementación) y que si M^{n+k} es k-conexa $U_f^{\bullet}=\Sigma^s\circ(\psi^{\bullet})^{-1}$, concluyendo como corolario, además, que $U_f^{\bullet}$ es un isomorfismo lo que da lo anteriormente apuntado acerca de la independencia del homomorfismo $U_f^{\bullet}$, aún en el caso $\partial M^{n+k}\neq\emptyset$, de la inmersión f y de la referencia U.

En consecuencia, si M^{n+k} es una π-variedad, sin borde, orientada, k-conexa con $n\geq k+2$ y M^n es una variedad orientada sin borde y conexa y $g:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ es una aplicación continua, se puede identificar el grado generalizado de g, d(g), con un elemento del grupo estable Π_k. Este grado generalizado caracteriza la clase de homotopía de g si $M^n=S^n$ (TEOREMA III.3.14).

En la clasificación de las clases de homotopía de las aplicaciones continuas de esferas en esferas, el ***invariante de Hopf***, que fue en principio introducido para probar que existen infinitas clases de homotopía de aplicaciones continuas de S^3 en

S^2, juega un papel importante. El invariante fue posteriormente definido por Hopf para funciones continuas definidas sobre la esfera 2k+1-dimensional y con imagen en la esfera de dimensión k+1. El invariante es siempre cero para k par. Una de las formas de definirlo, consiste en calcular el número de enlace de las imágenes inversas en S^{2k+1} de dos valores regulares distintos de una aplicación C^{∞}, de la clase de homotopía de la aplicación de que se trate. En virtud del isomorfismo introducido por L. Pontryagin $\Pi^{k}_{k+1}:\Pi_{2k+1}(S^{k+1})\longrightarrow\mathfrak{F}^{k}(S^{2k+1})$ dicho invariante puede ser definido en términos de k-variedades normalmente referenciadas. En este sentido Pontryagin en [29] demostró que dada una aplicación continua $f:S^{2k+1}\longrightarrow S^{k+1}$, el invariante de Hopf $\gamma(f)\in\mathbb{Z}$ es igual a $\gamma([(M^k,F)])=d(L)$ donde $[(M^k,F)]=\Pi^{k}_{k+1}([f])$ siendo $F=\{u_1,u_2,\ldots,u_{k+1}\}$ una referencia normal para M^k en $\mathbb{R}^{2k+1}$ y $d(L)$ es el grado de la aplicación $L:M^k\times M^k\longrightarrow S^{2k}$ definida por

$$L(x,y)=\frac{y+c_1u_1(y)+c_2u_2(y)+\ldots+c_{k+1}u_{k+1}(y)-x}{\left\| y+c_1u_1(y)+c_2u_2(y)+\ldots+c_{k+1}u_{k+1}(y)-x\right\|}$$

siendo $c=(c_1,c_2,\ldots,c_{k+1})$ un vector de $\mathbb{R}^{k+1}$ cualquiera de norma suficientemente pequeña.

Una de las propiedades mas importantes del invariante de Hopf es que $\gamma(f)=0$ si y solamente si $[f]\in\mathrm{Im}\Sigma$, donde Σ es como antes el homomorfismo suspensión.

Posteriormente se han hecho algunas generalizaciones del invariante de Hopf. Nosotros nos centraremos en la que se debe a G.W.Whitehead [35] en 1950, de la cual M.A.Kervaire en [21] en 1959 dio una interpretación que es bastante similar a la definición original de Hopf. Por tanto siempre que nos refiramos al invariante generalizado de Hopf lo haremos a esta interpretación obtenida por Kervaire.

Según se ha comentado antes, el invariante de Hopf está estrechamente relacionado con el homomorfismo suspensión $\Sigma:\Pi_{2k}(S^k)\longrightarrow\Pi_{2k+1}(S^{k+1})$, en consecuencia, un criterio para la utilidad de una generalización del invariante de Hopf es si se sigue verificando la relación anterior.

Dada una aplicación continua $f:S^{n+k+1}\longrightarrow S^{n+1}$ *el invariante generalizado de Hopf* $h(f)$, se define como un elemento de $\Pi_{2k+2n+2}(S^{k+3n+2})$ (o alternativamente en el grupo estable $\Pi_{k-n+N}(S^N)$) obteniéndo así, un homomorfismo $h:\Pi_{n+k+1}(S^{n+1})\longrightarrow\Pi_{2k+2n+2}(S^{k+3n+2})$. Es evidente por la definición de h que $\mathrm{Im}\Sigma\subset\mathrm{Ker}h$, sin embargo si la otra inclusión se da o no es un problema mucho más difícil.

Dada una inmersión difeomórfica $p:S^k\longrightarrow R^{n+k}\subset R^{n+k+1}$ tal que $p(S^k)$ tiene fibrado normal trivializable en R^{n+k+1} y dada $F=\{u_1,u_2,\dots,u_{n+1}\}$ una referencia normal ortonormal para $p(S^k)$, es claro que existe $f:S^{n+k+1}\longrightarrow S^{n+1}$ aplicación C^∞ tal que $\Pi^k_{n+1}([f])=[(p(S^k),F)]$ y que $\psi(x)=(e_{n+k+1}\cdot u_1(x),\dots,e_{n+k+1}\cdot u_{n+1}(x))$ define una función continua $\psi:S^k\longrightarrow S^n$. Similarmente a lo que ocurre con el invariante de Hopf, Kervaire demostró que $h(f)=\Sigma^{k+2n+2}[\psi]$. En la sección 4 del capítulo III damos una generalización de este resultado en la que se obtiene una consecuencia análoga si sustituimos S^k por una variedad M^k (k-n)-conexa (PROP. III.4.5). Este resultado permite resolver parcialmente (COROLARIO III.4.6) el problema de cuando $h(f)=0$ implica que $[f]\in\mathrm{Im}\Sigma$.

Una de las aplicaciones en la que el grado topológico de

Brouwer así como el grado de Leray-Schauder juegan un papel importante, es la teoría de la bifurcación. En este marco, P.M. Fitzpatrick, I. Massabó y J. Pejsachowicz introducen en 1983 en [11] y 1986 en [12] el concepto de complementación de aplicaciones continuas mediante el cual obtienen resultados acerca de la estructura y dimensión por recubrimientos del conjunto de soluciones de algunas ecuaciones no lineales. Dados un espacio de Banach E, $m\in\mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\times E$ y una aplicación continua $f:\bar{U}\longrightarrow E$ de la forma $f(\lambda,x)=x-F(\lambda,x)$, donde $F:\bar{U}\longrightarrow E$ es una aplicación completamente continua, se puede ***complementar*** si existe una aplicación continua y acotada $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ tal que la función $(g,f):\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^m\times E$ definida por $(g,f)(\lambda,x)=(g(\lambda,x),f(\lambda,x))$ no se anula en ∂U y el grado de Leray-Schauder de (g,f) en U está definido y es distinto de cero. En estas condiciones se dice que g es un ***complemento*** para f. Las consecuencias que se obtienen del hecho que una aplicación continua f, como antes, pueda ser complementada son interesantes, entre ellas, las de mayor importancia son:

1) El homomorfismo inducido en la cohomología de Čech por $g:(f^{-1}(0),f^{-1}(0)\cap\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\setminus\{0\})$ es no trivial.

Existe un subconjunto conexo $\mathcal{C}$ de $f^{-1}(0)$, cuya dimensión en cada punto de $\mathcal{C}\cap U$ es al menos m, que corta a $g^{-1}(0)$ y que verifica al menos una de las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{C}$ no está acotado

b) $\dim(\mathcal{C}\cap\partial U)\geq m-1$ y $g:\mathcal{C}\cap\partial U\longrightarrow\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ es esencial.

En cuanto al estudio del problema de cuando una aplicación continua, en las hipótesis anteriores, se pueda complementar es de destacar el siguiente teorema [12]:

Teorema

Sea U un subconjunto abierto y acotado de R^{n+m}. Supongamos que ∂U es una subvariedad de dimensión $n+m-1$ de R^{n+m}. Sea $f:\bar{U}\longrightarrow R^m$ una aplicación de clase C^p tal que $0\in(\text{v.r.})(f)\cap(\text{v.r.})(f|_{\partial U})$. Si $f^{-1}(0)\cap U\neq\emptyset$, se verifica que la aplicación f se puede complementar.

En el capítulo IV de esta Memoria se plantea el problema de extender el concepto de complementación mediante el grado generalizado en espacios euclideos y espacios vectoriales normados de dimensión infinita. Dado un espacio vectorial normado E, U un subconjunto abierto de $R^m\times E$ con $p_1(U)$ acotado en R^m, una aplicación $f:\bar{U}\longrightarrow E$ de la forma $f(\lambda,x)=x-F(\lambda,x)$ donde $F:\bar{U}\longrightarrow E$ es una aplicación compacta se dice que se puede *complementar generalizadamente* o simplemente *G-complementar* si existe una aplicación compacta $g:\bar{U}\longrightarrow R^k\times E$ con $k\leq m$ tal que $(g,f):\bar{U}\longrightarrow R^k\times E$ no se anula en ∂U y el grado generalizado de la aplicación (g,f) en U, $d((g,f),U)$, es distinto de cero.

Con esta definición, el primer problema que se aborda es la posible relación existente entre complementación y G-complementación. En este sentido, se encuentran ejemplos de aplicaciones continuas $f:\bar{U}\longrightarrow R^k$ que se pueden complementar pero no G-complementar mediante una aplicación $g:\bar{U}\longrightarrow R^k$ con $k\leq m$ (OBS. IV.1.6). El interés de la G-complementación está en que existen abiertos U y aplicaciones $f:\bar{U}\longrightarrow E$ que no se pueden complementar y que sin embargo sí pueden ser G-complementadas: en (IV.1.7) se construyen un abierto acotado U de R^5 y una aplicación continua $f:\bar{U}\longrightarrow R^3$ que admite un G-complemento pero no se puede complementar.

Una vez que se ha verificado la independencia entre los conceptos de complementación y complementación generalizada se obtienen resultados en la línea de los recogidos en [12] a los que antes nos hemos referido, es decir, se estudia la estructura y dimensión del conjunto de soluciones de la ecuación $f(x)=0$ donde f es una aplicación que se puede G-complementar, y se dan condiciones suficientes para que una aplicación continua admita un G-complemento. Mediante la relación que se demuestra que existe entre las aplicaciones $f:\bar{U}\longrightarrow E$ que se pueden G-complementar y las aplicaciones *0-epi*, introducidas en [19] se pueden obtener consecuencias semejantes a las que se tienen con la complementación. Así, si $f:\bar{U}\subset\mathbb{R}^m\times E\longrightarrow E$ es una aplicación continua de la forma $f(\lambda,x)=x-F(\lambda,x)$ y F es una aplicación compacta y $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^s$ es un G-complemento para f con $s\leq m$ se verifica que g es 0-epi en $f^{-1}(0)\cap U$ y en $f^{-1}(0)\cap\bar{U}$ y por tanto $\dim(f^{-1}(0)\cap\bar{U})\geq s$, $\dim(f^{-1}(0)\cap\partial U)\geq s-1$ (y $\dim(g^{-1}(0)\cap\bar{U})=\dim(g^{-1}(0)\cap\partial U)=\infty$ si $\dim E=\infty$) (PROP. IV.1.17 y COROLARIO IV.1.18). Además se prueba que si U es acotado, existe un subconjunto conexo, cerrado (minimal) $\mathfrak{C}$ de $f^{-1}(0)$ tal que g es 0-epi en $\mathfrak{C}\cap\bar{U}$ y en consecuencia $\dim(\mathfrak{C}\cap\bar{U})\geq s$, $\dim(\mathfrak{C}\cap\bar{U})\geq s-1$ y g es 0-epi en $\mathfrak{C}\cap\bar{U}$ (COROLARIO IV.1.20).

Por otra parte, si U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+m+k}$, tal que ∂U es una subvariedad de dimensión $n+m+k-1$ de $\mathbb{R}^{n+m+k}$, $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable con $0\in(\text{v.r.})(f)\cap(\text{v.r.})(f|_{\partial U})$ y $f^{-1}(0)\cap\partial U\neq\emptyset$ se demuestra, usando los resultados obtenidos en el capítulo III, que en las hipótesis de $\Pi_{n+m+k}(S^{n+m})\neq 0$, $n\geq k+2$ y $\delta:\Pi^{n-1}(\partial f^{-1}(0))\longrightarrow\Pi^n(f^{-1}(0),\partial f^{-1}(0))$ epimorfismo se tiene que f se puede G-complementar por una aplicación $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ (PROP. IV.1.8).

Ya en el artículo original de K.Geba, I.Massabó y A.Vignoli [15], se empleó el grado generalizado para el estudio de problemas de bifurcación: mediante el grado generalizado se construye una aplicación $\hat{\chi}:[S^{k-1}\times S^{n-1},R^n\setminus\{0\}]\longrightarrow\Pi_{n+k}(S^{n+1})$ y se demuestra que si $f:R^k\times R^n\longrightarrow R^n$ es una aplicación continua con $f(\lambda,0)=0$ para todo $\lambda\in R^k$ y $f(S^{k-1}\times(\bar{B}^n(0)\setminus\{0\}))\subset R^n\setminus\{0\}$ tal que $\hat{\chi}([f])\neq 0$ se tiene que existe un punto de bifurcación $\lambda_0\in\bar{B}^k(0)$ de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.

A partir de las consecuencias obtenidas de que una aplicación se pueda G-complementar, en la PROP. IV.1.22, se dan condiciones suficientes para que f, en las hipótesis del párrafo anterior, tenga un punto de bifurcación en $\bar{B}^k(0)$ y se obtiene como corolario el resultado anterior. Además y con el fin de encontrar herramientas que permitan estudiar la aplicación $\hat{\chi}$, para posteriormente abordar problemas de bifurcación se define, también mediante el grado generalizado, una aplicación $\delta:[S^{k-1}\times S^{n-1},R^n\setminus\{0\}]\longrightarrow\Pi_{n+k+1}(S^n)$ tal que $\hat{\chi}([f])=(\Sigma\circ\delta)([f])$, donde $\Sigma:\Pi_{n+k-1}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+k}(S^{n+1})$ es el homomorfismo suspensión (LEMA IV.1.24). Esta aplicación δ permite estudiar, en casos concretos, los problemas de bifurcación con mayor facilidad, al trabajar en dimensiones mas bajas. En este sentido el COROLARIO IV.1.27 permite obtener una relación interesante entre el número de enlace de circunferencias y la existencia de puntos de bifurcación de la ecuación $f(\lambda,x)=0$, donde $f:R^2\times R^2\longrightarrow R^2$ es una aplicación diferenciable: se demuestra que si $f(S^1\times(\bar{B}^2(0)\setminus\{0\}))\subset R^2\setminus\{0\}$, $H:S^1\times\bar{B}^2(0)\longrightarrow S^3$ está definida por $H(x,y)=\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$ y $\varphi_3:R^3\longrightarrow S^3\setminus\{q\}$ es la inversa de la proyección estereográfica desde q, $U=(\varphi_3\circ H)(S^1\times B^2(0))\subset R^3$ y

$\varepsilon=\frac{1}{2}\mathrm{dist}((f\circ H^{-1}\circ\varphi_3)(\partial U),0)$, $a_1,a_2\in B^2_\varepsilon(0)$ son dos valores regulares cualesquiera de $f\circ H^{-1}\circ\varphi_3$ y el número de enlace $L((f\circ H^{-1}\circ\varphi_3)^{-1}(a_1),(f\circ H^{-1}\circ\varphi_3)^{-1}(a_2))$ es impar, se tiene que existe un punto de bifurcación $\lambda_0\in B^2(0)$ de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.

El párrafo 1 del capítulo IV concluye con un teorema de bifurcación global (PROP. IV.1.29):
Si $f:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es una aplicación de clase C^1 tal que $f(\lambda,0)=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}^k$ y $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}^k:D_xf(\lambda,0)\notin GL(\mathbb{R}^n)\}$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^k$, S es la adherencia de todas las soluciones triviales de la ecuación $f(\lambda,x)=0$, $\lambda_1\in\Lambda$ y $C(\lambda_1)$ es la componente conexa de $(\lambda_1,0)$ en S y suponemos que $C(\lambda_1)$ es acotado se verifica que $C(\lambda_1)\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\}\times\{0\}$ y $\sum_{j=1}^{m}\hat{\chi}([f,\lambda_j])=0$.

Finalmente el párrafo 2 del capítulo IV se dedica al estudio del número de enlace de esferas de dimensiones altas, mediante la aplicación de las técnicas del grado generalizado. En la PROP. IV.2.4 se construye una aplicación $d:[S^{p_1}\times S^{p_2},S^{m-1}]\longrightarrow\pi_{p_1+p_2+1}(S^m)$, que es un homomorfismo si $p_1+p_2<2m-3$ e isomorfismo si $p_1,p_2\le m-2$, que permite definir el número de enlace $\alpha'(L)$ para un enlace $L:S^{p_1}\cup S^{p_2}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ y que juega el mismo papel que en el número de enlace introducido en [25] por W.S.Massey y D.Rolfsen en 1980.

CAPITULO 0

0.0 NOTACIONES PREVIAS.

Esta sección preliminar, contiene algunas de las notaciones que usaremos posteriormente.

Muchos de los espacios que consideraremos serán subespacios de $\mathbb{R}^n$ para algún entero positivo n, por ello es conveniente tomar todos los $\mathbb{R}^n$ con $n\in\mathbb{N}$ como subespacios del espacio vectorial normado de dimensión infinita $\mathbb{R}^\infty$ formado por todas las sucesiones de números reales $x=(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots)$ tales que $x_i=0$ para todos los subíndices menos un número finito de ellos, con la norma $\|x\|=\sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2}$. Así, $\|x-y\|$ es una métrica en $\mathbb{R}^\infty$. Por comodidad $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ y $(x_1,x_2,\dots,x_n,0,\dots,0..)$ denotarán el mismo punto. Estamos en condiciones de introducir algunos de los subespacios que manejaremos más a menudo.

E^n o cubo unidad, será el subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por $E^n=\{x\in\mathbb{R}^n: -1\le x_i\le 1 \quad i=1,2,\dots,n\}$.

S^n o esfera unidad, será $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2=1\}$. En S^n distinguiremos dos puntos especiales: $p=(0,0,\dots,0,-1)$ o polo Sur, y $q=(0,0,\dots,0,1)$ o polo Norte. $\varphi_n:\mathbb{R}^n\longrightarrow S^n\setminus\{q\}$ será la inversa de la proyección estereográfica de S^n sobre $\mathbb{R}^n$ desde el polo Norte. Observemos que $\varphi_n(0)=p$.

También vamos a distinguir dos subespacios de S^n, $E^n_+=\{x\in S^n: x_{n+1}\ge 0\}$ y $E^n_-=\{x\in S^n: x_{n+1}\le 0\}$. Es evidente que $S^n=E^n_+\cup E^n_-$ y $S^{n-1}=E^n_+\cap E^n_-$.

Por e_n designaremos el elemento de $\mathbb{R}^\infty$ dado por $(0,\dots,0,\overset{(n}{1},0,\dots,0\dots)$. Así, $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ forman la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Si $\mathbb{R}_+^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}: x_{n+1}\geq 0\}$ y $\mathbb{R}_-^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}: x_{n+1}\leq 0\}$ se tiene que $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}_+^{n+1}\cup\mathbb{R}_-^{n+1}$ y $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}_+^{n+1}\cap\mathbb{R}_-^{n+1}$.

Por I designaremos al intervalo cerrado $[0,1]$ de la recta real.

0.1 HOMOTOPIA. GRUPOS DE HOMOTOPIA Y DE COHOMOTOPIA.

En esta sección se expondrán los conceptos y resultados que nos harán falta en este campo, haciendo hincapié, sobre todo, en los grupos de cohomotopía que nos serán de gran utilidad en capítulos siguientes. Lo que a continuación desarrollaremos está, en su mayor parte, tomado de S.T.Hu: *Homotopy Theory* [18], K.Geba: *Cohomotopy Groups and Bifurcation* [16] y E.Spanier: *Borsuk's Cohomotopy Groups* [32].

Definiciones 0.1.1

Por un par de espacios topológicos, entenderemos X espacio topológico y A un subespacio de X. Se denotará por (X,A).

Una aplicación continua f entre dos pares (X,A) y (Y,B), $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, es una aplicación continua $f:X\longrightarrow Y$ con $f(A)\subset B$.

Por (X,A;Y,B) designaremos el conjunto de todas las aplicaciones continuas entre los pares (X,A) y (Y,B).

Si f y g son elementos de (X,A;Y,B), diremos que son homótopas si existe una aplicación continua $H:(X\times I,A\times I)\longrightarrow(Y,B)$ tal que $H(\cdot,0)=H_0=f$ y $H(\cdot,1)=H_1=g$. La relación de homotopía de aplicaciones continuas entre pares topológicos es de equivalencia y [X,A;Y,B] denotará el conjunto cociente correspondiente.

Sean X un espacio topológico, $A\subset X$ y x^* un punto de A. Sean $J^{n-1}=\{x\in E^n:(1+x_n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i^2)=0\}$ y $\dot{E}^n=\{x\in E^n:\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^2)=0\}$. Es claro que $J^{n-1}\subset\dot{E}^n\subset E^n$.

De manera similar a lo hecho para pares de espacios se pueden definir $(E^n, \dot{E}^n, J^{n-1}; X, A, x^\bullet)$ el conjunto de las aplicaciones continuas entre las ternas de espacios $(E^n, \dot{E}^n, J^{n-1})$ y $(X, A, x^\bullet)$, así como la relación de homotopía entre ellas y $[E^n, \dot{E}^n, J^{n-1}; X, A, x^\bullet]$ designará el conjunto cociente correspondiente, que también se denotará por $\Pi_n(X, A, x^\bullet)$.

Si $n=1$ y $A=x^\bullet$ o si $n>1$ se puede introducir una estructura de grupo en $\Pi_n(X, A, x^\bullet)$ de la siguiente forma:

Dados $[f]$ y $[g]$ dos elementos de $\Pi_n(X, A, x^\bullet)$, las clases determinadas por f y g, $[f]+[g]=[f+g]$, donde

$$(f+g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1+1, x_2, \ldots, x_n) & -1 \le x_1 \le 0 \\ g(2x_1-1, x_2, \ldots, x_n) & 0 \le x_1 \le 1 \end{cases}.$$

Si $x^\bullet$ y $x'^\bullet$ pertenecen a la misma componente por caminos de A, $\Pi_n(X, A, x^\bullet)$ y $\Pi_n(X, A, x'^\bullet)$ son isomorfos y el isomorfismo no es único en general, dependiendo de la clase de homotopía de los caminos que unen $x^\bullet$ y $x'^\bullet$. Muchos de los pares de espacios que aparecerán en esta Memoria son *n-simples*, es decir, X y A son conexos por caminos y el anterior isomorfismo es independiente del camino. En estos casos a $\Pi_n(X, A, x^\bullet)$, $x^\bullet \in A$, se le denotará por $\Pi_n(X, A)$ y se le llama *grupo de homotopía n-ésimo del par* (X, A).

Si $f: (X, A, x^\bullet) \longrightarrow (X', A', x'^\bullet)$ es una aplicación continua, se tiene un homomorfismo $f_*: \Pi_n(X, A, x^\bullet) \longrightarrow \Pi_n(X', A', x'^\bullet)$ definido por $f_*([h])=[f \circ h]$, el cual solo depende de la clase de homotopía de f.

Si $A=x^\bullet$, $\Pi_n(X, A, x^\bullet)=\Pi_n(X, x^\bullet, x^\bullet)$ se escribirá $\Pi_n(X, x^\bullet)$ y el grupo $\Pi_n(X, x^\bullet)$ es abeliano si $n \ge 2$.

Se puede dar una descripción equivalente de los grupos de homotopía $\Pi_n(X,x^*)$ como sigue:

$\Pi_n(X,x^*)=[S^n,s;X,x^*]$ donde $s=(1,0,\dots,0)\in S^n$ y si $[f],[g]$ son elementos de $[S^n,s;X,x^*]$, la suma $[f]+[g]=[h]$ donde h es la aplicación continua $h(x)=\begin{cases} f'(x) & \text{si } x\in E^n_+ \\ g'(x) & \text{si } x\in E^n_- \end{cases}$ siendo f' y g' representantes de $[f]$ y $[g]$ respectivamente, tales que $f'(E^n_-)=g'(E^n_+)=x^*$.

En el caso particular de S^m, $m>1$, que es n-simple para todo $n\in N$, $\Pi_n(S^m)$ denotará el grupo de homotopía n-ésimo de S^m.

Grupos de cohomotopía.

Definiciones 0.1.2

a) Diremos que un par topológico (X, A) es compacto, si X es compacto y A es un subespacio cerrado de X.

b) Un par topológico (X, A) se dice que es r-coconexo si $H^q(X,A)=0$ para todo $q\geq r$, ($H^q(X,A)$ es el q-ésimo grupo de cohomología singular, con coeficientes enteros, del par (X, A)) ([18] pg. 210).

En lo que resta de sección todos los pares de espacios que aparezcan se supondrán compactos, salvo indicación de lo contrario.

Denotemos por $\mathfrak{C}_n=\{(X,A):(X,A)$ es un par celular, (es decir, X es un complejo de celdas finito y A es un subcomplejo de X) compacto y $(2n-1)$-coconexo$\}$ y $\mathfrak{C}'_n=\{(X,A):(X,A)$ es un par compacto tal que $\dim(X\setminus A)\leq 2n-2$ y X es metrizable$\}$ ([18] pg. 226, [16] pg. 14, [32] pg. 211).

Definición 0.1.3

Dos aplicaciones $f,g:(X,A)\longrightarrow(\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\},\mathbb{R}^{m+1}_-\setminus\{0\})$ se dice que están en posición general si $f^{-1}(p)\cup g^{-1}(p)=X$. En este caso se define la aplicación $f\vee g:(X,A)\longrightarrow(\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\},\mathbb{R}^{m+1}_-\setminus\{0\})$ por $f\vee g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } g(x)=p \\ g(x) & \text{si } f(x)=p \end{cases}$. Claramente $f\vee g$ es continua si f y g lo son.

Teorema 0.1.4

Si (X, A) es un elemento de $\mathfrak{C}_n$ o de $\mathfrak{C}'_n$ y $g,f:(X,A)\longrightarrow(\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\},\mathbb{R}^{m+1}_-\setminus\{0\})$ son dos aplicaciones continuas, donde $m\geq n$, se verifica que existen f_1 y g_1 aplicaciones homótopas a f y g respectivamente, que están en posición general. La clase $[g_1 v f_1]$ solo depende de $[g]$ y $[f]$ y la operación $[g]+[f]=[g_1 v f_1]$ define una estructura de grupo abeliano en $[X,A;R^{m+1}\setminus\{0\},R_-^{m+1}\setminus\{0\}]$. Este grupo también se denotará por $\Pi^m(X,A)$ y se le llama *grupo de cohomotopía m-ésimo de* (X,A).

Proposición 0.1.5

Sean (X,A) e (Y,B) pares de espacios de $\mathfrak{C}_n$ o de $\mathfrak{C}'_n$ y $g:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ una aplicación continua. Entonces, para cada $m\geq n$ g induce un homomorfismo $g^{*}:\Pi^m(Y,B)\longrightarrow\Pi^m(X,A)$ que solo depende de la clase de homotopía de g y está definido por $g^{*}([f])=[f\circ g]$.

A continuación vamos a definir un homomorfismo (cuando exista estructura de grupo en los conjuntos involucrados) $\delta:\Pi^m(A,\emptyset)=\Pi^m(A)\longrightarrow\Pi^{m+1}(X,A)$ llamado *homomorfismo coborde*: sean $f:A\longrightarrow R^{m+1}\setminus\{0\}$ una aplicación continua, $\hat{f}:X\longrightarrow R^{m+1}$ una extensión continua de f y $\theta:X\longrightarrow[0,1]$ una aplicación continua con $\theta^{-1}(0)=A$. Entonces $g(x)=\hat{f}(x)+\theta(x)e_{m+2}$ define una aplicación continua $g:(X,A)\longrightarrow(R^{m+2}\setminus\{0\},R_-^{m+2}\setminus\{0\})$ que solo depende de la clase de homotopía de f. La aplicación $\delta([f])=[g]$, define un homomorfismo $\delta:\Pi^m(A)\longrightarrow\Pi^{m+1}(X,A)$.

Teorema 0.1.6

Sean (X,A), (Y,B) y (Z,C) de $\mathfrak{C}_n$ o de $\mathfrak{C}'_n$. Se verifica:

a) Si $f,g:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ son aplicaciones continuas homótopas, se tiene que $f^{*}=g^{*}$.

b) Si $Y\setminus B=X\setminus A$ y $e:(X,A)\hookrightarrow(Y,B)$ es la inclusión $(X\subset Y)$, se tiene que $e^{*}:\Pi^m(Y,B)\longrightarrow\Pi^m(X,A)$ es un isomorfismo.

c) *Exactitud.* Si $j:X\hookrightarrow(X,A)$, $i:A\hookrightarrow X$ son las inclusiones y $(X,\emptyset)$, $(A,\emptyset)$ y (X,A) son elementos de $\mathfrak{C}_n$ o de $\mathfrak{C}'_n$, se verifica que la siguiente sucesión de homomorfismos $\Pi^n(X,A) \xrightarrow{j^*} \Pi^n(X) \xrightarrow{i^*} \Pi^n(A) \xrightarrow{\delta} \Pi^{n+1}(X,A) \xrightarrow{j^*} \cdots$ es exacta.

d) Si $\mathrm{Id}:(X,A) \longrightarrow (X,A)$ es la aplicación identidad se tiene que $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}_{\Pi^m(X,A)}$.

e) Si $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ y $g:(Y,B) \longrightarrow (Z,C)$ son aplicaciones continuas se verifica que $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$.

f) Si $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una aplicación continua, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Pi^m(B) & \xrightarrow{\delta} & \Pi^{m+1}(Y,B) \\ {\scriptstyle (f|_A)^*}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f^*} \\ \Pi^m(A) & \xrightarrow{\delta} & \Pi^{m+1}(X,A) \end{array}$$

es conmutativo.

g) Si $(X,A)\in\mathfrak{C}_n$ ó $\mathfrak{C}'_n$, $\Pi^m(X,A)=0$ para todo $m>2n-2$.

Sea (X,A) un elemento de $\mathfrak{C}_n$ o de $\mathfrak{C}'_n$ y $f:(X,A) \longrightarrow (R^{m+1}\setminus\{0\}, R_-^{m+1}\setminus\{0\})$ una aplicación continua. Entonces la fórmula $g(x)=\dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$ define una aplicación continua g de (X,A) en (S^m,E_-^m). Sea $d:S^m\times I \longrightarrow S^m$ tal que $d(x,0)=x$ para cada $x\in S^m$ y $d(x,1)=p$ para todo $x\in E_-^m$, se verifica que la correspondencia $[f] \longmapsto [d_1\circ g]$ induce una biyección entre $\Pi^m(X,A)$ y $[X,A;S^m,p]$ y se utilizará una descripción u otra según interese.

Observaciones.

De la anterior descripción es interesante destacar:

1) Si $f:(X,A) \longrightarrow (S^m,p)$ es una aplicación continua con (X,A) de $\mathfrak{C}_n$ o $\mathfrak{C}'_n$, se tiene que $-[f]=[r\circ f]$ donde $r:S^m \longrightarrow S^m$ es una

aplicación continua de grado -1, con $r(p)=p$.

2) *Interpretación de δ.* Si $f\colon A\longrightarrow S^m$ es una aplicación continua y $\tilde{f}\colon X\longrightarrow E_+^{m+1}$ es una extensión continua de f, sea $\psi\colon (E_+^{m+1}\times I, S^m\times I)\longrightarrow(S^{m+1}, E_-^{m+1})$ una aplicación continua tal que $\psi_0=\mathrm{Id}$ y $\psi_1\colon (E_+^{m+1}, S^m)\longrightarrow(S^{m+1}, p)$ con $\psi_1|_{E^{m+1}\setminus S^m}$ homeomorfismo sobre $S^m\setminus\{p\}$. Entonces $\delta([f])=[\psi_1\circ\tilde{f}]$.

3) Cuando $\Pi^n(S^m)$ es un grupo, es decir, si $m\leq 2n-2$ $\Pi^n(S^m)\cong\Pi_m(S^n)$.

0.2. VARIEDADES DIFERENCIABLES ([23] y [31]).

En esta sección se establecerán las definiciones, notaciones y propiedades básicas de las variedades diferenciables, así como las de las aplicaciones entre ellas, que se necesitarán mas tarde. Nos centraremos, exclusivamente, en las variedades de clase C^∞. Esto no supone pérdida de generalidad, ya que se verifica que toda variedad de clase C^1 admite una estructura diferenciable de clase C^∞ compatible con ella.

Sea X un conjunto.

Definición 0.2.1

Una carta en X es una terna $c=(U,\varphi,R^m)$ donde $\varphi:U\longrightarrow R^m$ es una aplicación inyectiva y $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto de R^m o de R^m_+.

Definición 0.2.2

Dos cartas $c=(U,\varphi,R^n)$ y $c'=(U',\varphi',R^m)$ en X son C^∞-*compatibles*, y se denotará por $c\approx c'$, si:

a) $\varphi(U\cap U')$ es abierto en $\varphi(U)$ y $\varphi'(U\cap U')$ es abierto en $\varphi(U')$.

b) $\varphi'\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap U')\longrightarrow\varphi'(U\cap U')$ y $\varphi\circ\varphi'^{-1}:\varphi'(U\cap U')\longrightarrow\varphi(U\cap U')$ son aplicaciones de clase C^∞.

En particular, si $U\cap U'\neq\emptyset$ se tiene que $n=m$.

(Las aplicaciones de clase C^∞ de abiertos de R^m_+ son las que coinciden con restricciones de aplicaciones de clase C^∞ definidas sobre abiertos de R^m que lo contienen).

Definición 0.2.3

$\mathcal{A}=\{c_i=(U_i,\varphi_i,R^{n_i}): i\in I\}$ es un *atlas* C^∞ en X si:

a) Para todo $i\in I$ c_i es una carta en X.

b) $\bigcup_{i\in I}U_i=X$.

c)para cada $i,j\in I$, $c_i \approx c_j$.

Definición 0.2.4

Dos atlas C^∞ en X son equivalentes, si su unión es un atlas C^∞ en X.

Esta relación binaria, definida entre los atlas C^∞ en X, es de equivalencia y motiva la siguiente definición.

Definición 0.2.5

Una variedad diferenciable de clase C^∞ es un par $(X,[A])$, donde X es un conjunto y $[A]$ es la clase de equivalencia del atlas C^∞ A, en X, determinada por la relación definida en 0.2.4.

Observemos que toda variedad $(X,[A])$ tiene automáticamente asociado un espacio topológico $(X,T_{[A]})$ tal que $\mathcal{B}_{[A]}=\{U\subset X:$ existe $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ carta de $(X,[A])\}$ es base de $T_{[A]}$.

Sobre cada componente conexa de $(X,T_{[A]})$, los espacios euclídeos sobre los que están modeladas las cartas, tienen la misma dimensión. A esta dimensión se le llama *dimensión de la componente.*

Definición 0.2.6

Dada $(X,[A])$ una variedad diferenciable C^∞, se llama *interior* de X, y se denotará por Int(X), al conjunto $\mathrm{Int}(X)=\{x\in X:$ existe $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ carta de $(X,[A])$ con $x\in U$ y $\varphi(U)$ es abierto de $\mathbb{R}^n\}$ y se llama *borde de* X, y se denotará por ∂X, al conjunto $\partial X=\{x\in X:$ existe $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ carta de $(X,[A])$ con $x\in U$ y $\varphi(x)$ no pertenece al interior de $\varphi(U)\}$ (se considera el interior en $\mathbb{R}^n$).

De ahora en adelante y siempre que no haya lugar a confusión, no se especificarán ni los atlas C^{∞} ni la topología asociada a las mismas. Siempre que hablemos de variedades, se entenderán diferenciables de clase C^{∞}.

Definamos en una variedad X, el concepto de *espacio tangente*. Sea $x \in X$, se considera $C_x=\{(c,v): c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ es una carta de X con $x \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n\}$ y sea la siguiente relación binaria en C_x: $(c,v) \approx (c',v')$ si y solamente si $x \in U \cap U'$ y $D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(v)=v'$. Por la regla de la cadena del cálculo diferencial, es trivial comprobar que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Definición 0.2.7

Se llama espacio tangente a la variedad X en el punto x, y se denotará por T_xX, al conjunto cociente $C_x/\approx$.

Proposición 0.2.8

Sea X una variedad.

a) Para cada $x \in X$ y cada $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$, carta de X con $x \in U$, se tiene una aplicación biyectiva $\theta_c^x: \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xX$ definida por $\theta_c^x(v)=[(c,v)]$.

b) Dadas dos cartas $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ y $c'=(U',\varphi',\mathbb{R}^n)$ con $x \in U \cap U'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\theta_c^x"] \arrow[d, "D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))"'] & T_xX \arrow[d, "Id_{T_xX}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\theta_{c'}^x"] & T_xX \end{tikzcd}$$

Por tanto trasladando por θ_c^x la estructura de $\mathbb{R}^n$, se obtiene en T_xX una estructura de espacio vectorial normable de dimensión n, que es independiente de la carta c elegida, en el sentido de que las normas obtenidas por las distintas θ_c^x, al variar c, son equivalentes.

Definición 0.2.9

Sean X y X′ dos variedades y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación.

Diremos que f es de clase C^∞ si para todo $x\in X$, existen $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ y $c'=(U',\psi,\mathbb{R}^m)$ cartas en X y X′ respectivamente, con $x\in U$ y $f(U)\subset U'$, tales que $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\longrightarrow\psi(U')$ es C^∞.

Proposición 0.2.10

Sean X, X′ y X″ variedades.

a) Si $f:X\longrightarrow X'$ es C^∞, $x\in X$ y $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ y $c'=(V,\psi,\mathbb{R}^m)$ son cartas de X y X′ respectivamente, con $x\in U$ y $f(U)\subset V$, se tiene que la aplicación $T_xf:T_xX\longrightarrow T_{f(x)}X'$, definida por $T_xf(v)=\theta_{c'}^{f(x)}\circ D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))\circ {\theta_c^x}^{-1}(v)$, es un homomorfismo que no depende de c y c'.

b) Si $f:X\longrightarrow X'$ y $g:X'\longrightarrow X''$ son C^∞ y $x\in X$, se verifica que $T_x(g\circ f)=T_{f(x)}g\circ T_xf$ y $T_x\mathrm{Id}=\mathrm{Id}_{T_xX}$.

Definición 0.2.11

En las condiciones de la proposición anterior, a T_xf se le llama *aplicación lineal tangente de f en x*.

Ahora presentamos los tipos mas importantes de aplicaciones diferenciables entre variedades.

Definición 0.2.12

Sean X y X' variedades, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación biyectiva tal que f y f^{-1} son C^{∞}. Entonces, se dice que f es un *difeomorfismo* C^{∞}.

Proposición 0.2.13

Si X y X' son variedades y $f:X\longrightarrow X'$ es un difeomorfismo C^{∞}, se tiene que $f(\partial X)=\partial X'$.

Definiciones 0.2.14

Sean X y X' variedades y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación C^{∞}.

a) f es una *inmersión* en $x\in X$ si existen $c=(U,\varphi,R^n)$ y $c'=(U',\varphi',R^m)$, cartas de X y X' respectivamente, con $x\in U$, $f(U)\subset U'$, $\varphi(U)\subset\varphi'(U')$, $\varphi(x)=0$ y $\varphi'\circ f\circ\varphi^{-1}=j:\varphi(U)\hookrightarrow\varphi'(U')$ es la inclusión.

b) f es una inmersión, si es una inmersión en todo x de X.

c) f es una *inmersión difeomórfica*, si es una inmersión y es un homeomorfismo sobre su imagen.

d) f es una *sumersión* en $x_0\in X$, si existen W' abierto de X' con $f(x_0)\in W'$ y $\delta:W'\longrightarrow X$ aplicación C^{∞} con $\delta(f(x_0))=x_0$ y $(f\circ\delta)(x')=x'$ para todo $x'\in W'$.

e) f es una sumersión, si es una sumersión en todo $x\in X$.

Proposición 0.2.15

En las condiciones de las definiciones anteriores, se verifica:

a) Si $x\in X$ y $f(x)\in \mathrm{Int}(X')$, se tiene que f es una inmersión en x si y solamente si $T_x f$ es inyectiva.

b) Si $\partial X=\partial X'=\emptyset$, f es una sumersión en $x\in X$ si y solamente si $T_x f$ es sobreyectiva.

Definición 0.2.16

Sea X una variedad e Y un subconjunto de X. Diremos que Y es una *subvariedad* de X si para cada $y\in Y$ existe $c=(U,\varphi,R^m)$, carta de X, con $y\in U$ y $\varphi(y)=0$ y existe un subespacio F de R^m de dimensión n tal que $\varphi(U\cap Y)=\varphi(U)\cap F$ o $\varphi(U\cap Y)=\varphi(U)\cap F_+$ (F_+ es un semiespacio de F). Si se cumplen las condiciones anteriores, diremos que c es *carta adaptable a* Y *en y mediante* F.

Proposición 0.2.17

Sean $(X,[A])$ una variedad e Y una subvariedad de X. Entonces, existe una única estructura diferenciable C^∞, $[[A]|_Y]$, en Y tal que para cada $c=(U,\varphi,R^m)$, carta de X adaptable a Y mediante F, $c|_Y=(U\cap Y,\varphi|_{U\cap Y},F)$ es carta de $(Y,[[A]|_Y])$. Además, $T_{[[A]|_Y]}=T_{[A]}|_Y$, $j:(Y,[[A]|_Y])\hookrightarrow(X,[A])$ es una inmersión C^∞ y para todo $y\in U$, $T_y j(T_y Y)=\theta_c^y(F)$.

Si Y es una subvariedad de X, a la dimensión de $T_yX/T_yj(T_yY)$, para cada $y\in Y$, se le llama *codimensión* de Y en y y se designará por $\mathrm{codim}_y Y$.

Definición 0.2.18

Sea Y una subvariedad de X. Diremos que Y *está bien situada* si $\partial Y=Y\cap\partial X$.

En este caso, para todo $y\in\partial Y$, $T_yX=T_yi(T_y\partial X)+T_yj(T_yY)$ (suma algebraica de subespacios), donde $i:\partial X\hookrightarrow X$ y $j:Y\hookrightarrow X$ son las inclusiones. (Observemos que ∂X es una subvariedad sin borde de X).

Proposición 0.2.19

Sean X y X' dos variedades, si $f:X\longrightarrow X'$ es una inmersión difeomórfica, se verifica que $f(X)$ es una subvariedad de X'.

Proposición 0.2.20

Sean X y X' dos variedades, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación C^{∞} y $x\in\partial X$ tal que $f(x)\in\mathrm{Int}(X')$. Entonces, $f:X\longrightarrow X'$ es una sumersión en x si y solamente si $T_x(f|_{\partial X}):T_x\partial X\longrightarrow T_{f(x)}X'$ es sobreyectiva.

Proposición 0.2.21

Sean X y X' dos variedades, Y' una subvariedad de X' y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación C^{∞} tal que $f^{-1}(Y')\cap\partial X=\emptyset$ y para todo x de $f^{-1}(Y')$, f es sumersión en x. Entonces:

a) $f^{-1}(Y')$ es una subvariedad de X.

b) $\partial f^{-1}(Y')=f^{-1}(\partial Y')$.

c) Si $j:f^{-1}(Y')\hookrightarrow X$ y $j':Y'\hookrightarrow X'$ son las inclusiones, para todo $x\in f^{-1}(Y')$, $T_xj(T_xf^{-1}(Y'))=(T_xf)^{-1}(T_{f(x)}j'(T_{f(x)}Y'))$.

d) Para todo $x\in f^{-1}(Y')$, $\mathrm{codim}_x f^{-1}(Y')=\mathrm{codim}_{f(x)}Y'$.

Definición 0.2.22

Sean X y X' variedades y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación C^{∞}. Diremos que $x\in X$ es un *punto crítico de f*, si T_xf no es sobreyectiva. Denotaremos por $C(f)$ al conjunto de puntos críticos de f.

Diremos que $x'\in X'$ es un *valor regular de f*, si $x'\in X'\setminus f(C(f))$. Al conjunto de valores regulares de f se le denotará por $(v.r.)(f)$.

Por el Teorema de A.Sard, se tiene que si $f:X\longrightarrow X'$ es una aplicación C^∞, el conjunto $(v.r.)(f)$ es un conjunto denso en X' y en particular es no vacío.

Definiciones 0.2.23

Sean X y X' variedades diferenciables, X" una subvariedad de X' y $x\in X$. Sea $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación de clase C^∞.

a) f es *transversal* a X" *en x* ($f\,\overline{\pitchfork}_x\,X''$) si se verifica:

1) $f(x)\notin X''$ ó 2) $f(x)\in X''$ y existen un subconjunto abierto U de X con $x\in U$, $c'=(U',\varphi',R^m)$ carta de X', adaptable a X" mediante F con $f(U)\subset U'$, y F' suplementario topológico de F en R^m tales que la aplicación C^∞

$h:U\xrightarrow{f}U'\xrightarrow{\varphi'}R^m\xrightarrow{\theta}F\times F'\xrightarrow{p_2}F'$ es una sumersión en x.
($\theta:R^m\longrightarrow F\times F'$ es la aplicación definida por $\theta(v)=(v_1,v_2)$ donde $v=v_1+v_2$ con $v_1\in F$ y $v_2\in F'$).

b) Si A es un subconjunto de X, diremos que f es transversal a X" sobre A ($f\,\overline{\pitchfork}_A\,X''$) si f es transversal a X" en x, para todo $x\in A$.

c) f es transversal a X" ($f\,\overline{\pitchfork}\,X''$), si f es transversal a X" en x, para todo $x\in X$.

Proposición 0.2.24

Sean X y X' variedades diferenciables, X" una subvariedad de X' y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación C^∞. Entonces, si $f(x)\in X''$ se verifica que $f\,\overline{\pitchfork}_x\,X''$ si y solamente si:

$T_{f(x)}X'=T_xf(T_xX)+T_{f(x)}j(T_{f(x)}X'')$ si $x\in\mathrm{Int}(X)$ o

$T_{f(x)}X'=T_x(f|_{\partial X})(T_x\partial X)+T_{f(x)}j(T_{f(x)}X'')$ si $x\in\partial X$.

$(j:X''\hookrightarrow X')$.

Proposición 0.2.25

Sean X y X' variedades diferenciables, X'' una subvariedad bien situada de X' y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación C^∞. Si $f\pitchfork X''$ se tienen las siguientes consecuencias:

1) $f^{-1}(X'')$ es una subvariedad bien situada de X.

2) Si $j:f^{-1}(X'')\hookrightarrow X$ y $j':X''\hookrightarrow X'$ son las inclusiones, para todo $x\in f^{-1}(X'')$, $T_xj(T_xf^{-1}(X''))=(T_xf)^{-1}(T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X''))$.

3) Para todo $x\in f^{-1}(X'')$, $\mathrm{codim}_xf^{-1}(X'')=\mathrm{codim}_{f(x)}X''$.

0.3 FIBRADOS VECTORIALES ([31] Tomo II, pgs.8-112).

Definiciones 0.3.1

Sean M un conjunto, B una variedad, con $\dim B=n$, $\pi:M\longrightarrow B$ una aplicación sobreyectiva y $r=(M,B,\pi)$.

a) $t=(U,\psi,\mathbb{R}^n)$ es una *carta vectorial* de r, modelada sobre $\mathbb{R}^n$, si U es un abierto de B y $\psi:U\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\pi^{-1}(U)$ es una aplicación biyectiva tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por tanto, para cada $b\in U$ $t_b:\mathbb{R}^n\longrightarrow\pi^{-1}(b)=M_b$ definida por $t_b(v)=\psi(b,v)$, es una aplicación biyectiva.

b) Sean $t=(U,\psi,\mathbb{R}^n)$ y $t'=(U',\psi',\mathbb{R}^s)$ cartas vectoriales de r. Se dice que t y t' son *compatibles*, si existe $\mu:U\cap U'\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^s)$ aplicación C^∞, tal que para todo $b\in U\cap U'$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "t_b"] \arrow[dr, "\mu(b)"'] & M_b \\ & \mathbb{R}^s \arrow[u, "t'_b"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. En particular, si $U\cap U'\neq\emptyset$ se tiene que $n=s$.

c) $V=\{t_i=(U_i,\psi_i,\mathbb{R}^n):i\in I\}$ es un ***atlas vectorial*** de r si:

1) Para todo $i\in I$, t_i es una carta vectorial de r.

2) $\bigcup_{i\in I}U_i=B$.

3) Si $i,j\in I$, t_i y t_j son compatibles.

d) Dos atlas vectoriales de r, V y V', son *equivalentes* si $V\cup V'$ es un atlas vectorial de r. Esta relación, es de equivalencia y a la terna $((M,[V]),B,\pi)$, donde $[V]$ es la clase del atlas V de

r, se le denomina fibrado vectorial C^∞, con espacio total M, base B y proyección π.

No especificaremos el atlas vectorial cuando no haya lugar a confusión, y hablaremos de $r=(M,B,\pi)$ como fibrado vectorial de espacio total M, espacio base B y proyección π.

Proposición 0.3.2

Sea $r=(M,B,\pi)$ un fibrado vectorial. Para cada $b\in B$ existe una única estructura de espacio vectorial normable, de dimensión finita, en M_b, tal que $t_b:R^n \longrightarrow M_b$ es un isomorfismo, para toda $t=(U,\psi,R^n)$ carta vectorial de r con $b\in U$.

Proposición 0.3.3

Sean $r=(M,B,\pi)$ un espacio fibrado vectorial, $t=(U,\psi,R^n)$ una carta de r y $c=(U,\varphi,R^m)$ una carta de B. Entonces,

$\alpha_{c,t}:\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\psi^{-1}} U\times R^n \xrightarrow{\varphi\times Id} \varphi(U)\times R^n$ es una aplicación biyectiva y existe una única estructura de variedad en M, conteniendo a todas las ternas $(\pi^{-1}(U),\alpha_{c,t},R^n\times R^m)$ como cartas.

Definición 0.3.4

Sean $f:B \longrightarrow B'$ una aplicación C^∞ y $r=(M,B,\pi)$, $r'=(M',B',\pi')$ dos fibrados vectoriales. Diremos que $g:M \longrightarrow M'$ es un *f-morfismo* si:

a) $g:M \longrightarrow M'$ es una aplicación C^∞.

b) El diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

es conmutativo.

c) $g_b = g|_{M_b} : M_b \longrightarrow M_{f(b)}$ es lineal.

Proposición 0.3.5

Sean $r=(M,B,\pi)$ y $r'=(M',B',\pi')$ fibrados vectoriales, $f:B\longrightarrow B'$ una aplicación C^∞ y $g:M\longrightarrow M'$ un f-morfismo. Entonces, g es una aplicación C^∞ y si f es un difeomorfismo y g es biyectiva, se tiene que g es un difeomorfismo, g^{-1} es un f^{-1}-morfismo y $(g^{-1})_{f(b)}=g_b^{-1}$.

Definiciones 0.3.6

1) g es un B-*morfismo*, si es un Id_B-morfismo.

2) g es un B-*isomorfismo*, si es un B-morfismo biyectivo.

3) Un fibrado vectorial es *trivializable*, si es B-isomorfo a $(B\times R^n, B, p_1)$ para algún $n\in N$.

FIBRADO VECTORIAL IMAGEN INVERSA.

Proposición 0.3.7

Sean $r=(M,B,\pi)$ un fibrado vectorial, B' una variedad y $f:B'\longrightarrow B$ una aplicación C^∞. Sean $M'=\{(b',x)\subset B'\times M: f(b')=\pi(x)\}$, $\pi':M'\longrightarrow B'$ definida por $\pi'(b',x)=b'$ y $\tilde{f}:M'\longrightarrow M$ dada por $\tilde{f}(b',x)=x$. Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\tilde{f}} & M \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

es conmutativo y existe una única estructura, V', de fibrado vectorial en $r'=(M',B',\pi')$, que denotaremos también por $(f^{*}(M),B',f^{*}(\pi))$, tal que $\tilde{f}$ es un f-morfismo.

Dada $t=(U,\psi,\mathbb{R}^n)$ carta vectorial de r, se construye $t'=(f^{-1}(U),\psi',\mathbb{R}^n)$ carta vectorial de V', estando $\psi':f^{-1}(U)\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\pi'^{-1}(f^{-1}(U))$ definida por

$$\psi'(b',v) = (b',\psi(f(b'),v))$$

$(V'=\{t'=(f^{-1}(U),\psi',\mathbb{R}^n): t=(U,\psi,\mathbb{R}^n)$ es carta vectorial de $r\})$.

Proposición 0.3.8

Sean $r=(M,B,\pi)$ un fibrado vectorial, B' y B'' variedades, $f:B'\longrightarrow B$ y $f_1:B''\longrightarrow B'$ aplicaciones C^{∞}. Entonces, $(f_1^{*}(f^{*}(M)),B'',f_1^{*}(f^{*}(\pi)))$ es B''-isomorfo a $((f\circ f_1)^{*}(M),B'',(f\circ f_1)^{*}(\pi))$ y el B''-isomorfismo, Φ, está definido por

$$\begin{aligned}\Phi: f_1^{*}(f^{*}(M)) &\longrightarrow (f\circ f_1)^{*}(M).\\ (b'',(b',x)) &\longmapsto (b'',x)\end{aligned}$$

Proposición 0.3.9

Sean $r=(M,B,\pi)$ y $r'=(M',B',\pi')$ fibrados vectoriales y $f:B'\longrightarrow B$ una aplicación C^{∞}. Sea $h:M'\longrightarrow M$ un f-morfismo. Entonces, existe un único B'-morfismo $h_{*}:M'\longrightarrow f^{*}(M)$ tal que $\tilde{f}\circ h_{*}=h$. Se tiene así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_*"] \arrow[dd, "\pi'"'] & & M \arrow[dd, "\pi"] \\ & f^*(M) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[dl, "f^*(\pi)"] & \\ B' \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

donde $h_*: M' \longrightarrow f^*(M)$.

$y' \longmapsto (\pi'(y'), h(y'))$

Proposición 0.3.10

Sean $r=(M,B,\pi)$ y $r'=(M',B,\pi')$ fibrados vectoriales, $f:B' \longrightarrow B$ una aplicación C^∞ y $\theta: M \longrightarrow M'$ un B-morfismo. Entonces,

a) Existe un único B'-morfismo $f^*(\theta): f^*(M) \longrightarrow f^*(M')$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo, donde $f^*(\theta)(b',x)=(b',\theta(x))$

$$\begin{tikzcd} f^*(M) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "f^*(\theta)"'] & M \arrow[d, "\theta"] \\ f^*(M') \arrow[r, "\tilde{f}'"] & M' \end{tikzcd}$$

b) Si θ es un B-isomorfismo, se tiene que $f^*(\theta)$ es un B'-isomorfismo

Definición 0.3.11

Sean B una variedad, B' una subvariedad de B, $j:B' \hookrightarrow B$ la inclusión y $r=(M,B,\pi)$ un fibrado vectorial. Llamaremos *fibrado vectorial inducido por r sobre B'* a $j^*(r)=(j^*(M),B',j^*(\pi))$. Observemos que $j^*(r)$ se puede identificar canónicamente con $(\pi^{-1}(B'),B',\pi|_{\pi^{-1}(B')})$.

SUBFIBRADOS VECTORIALES. FIBRADOS VECTORIALES COCIENTES.

Definición 0.3.12

Sea $r=(M,B,\pi)$ un fibrado vectorial y $M'\subset M$. Diremos que M' es un *subfibrado vectorial* de r, si para todo $b\in B$ existe $t=(U,\psi,\mathbb{R}^n)$ carta de r, con $b\in U$, y existe F subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $\psi^{-1}(\pi^{-1}(U)\cap M')=U\times F$.

Proposición 0.3.13

Sea $r=(M,B,\pi)$ un fibrado vectorial y $M'\subset M$ un subfibrado vectorial de r. Entonces,

a) Existe una única estructura de fibrado vectorial en $r'=(M',B',\pi|_{M'})$ tal que $j:M'\hookrightarrow M$ es un B-morfismo.

b) Para cada $b\in B$, $M'_b=M'\cap M_b$ es subespacio vectorial de M_b.

c) M' es una subvariedad de M.

Proposición 0.3.14

Sean $r=(M,B,\pi)$ un fibrado vectorial y $r'=(M',B,\pi|_{M'})$ un subfibrado vectorial de r. Sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia definida en M por $x\mathcal{R}y$ si y solamente si existe $b\in B$, con $x,y\in M_b$, tal que $x-y\in M'_b$ y consideremos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & M/\mathcal{R} \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

con $\bar{\pi}([x])=\pi(x)$. Entonces, existe una única estructura de fibrado vectorial sobre $\bar{r}=(M/\mathcal{R},B,\bar{\pi})$ tal que p es un B-morfismo. A $(M/\mathcal{R},B,\bar{\pi})$ también se le denotará por $(M/M',B,\bar{\pi})$. Las cartas vectoriales de $\bar{r}$ se construyen como sigue:

Para cada $b_0 \in B$, existe $t=(U,\psi,R^n)$, carta vectorial de r, con $b_0 \in U$, y existe F subespacio vectorial de R^n tales que $\psi^{-1}(\pi^{-1}(U) \cap M')=U\times F$. Entonces, $\bar{t}=(U,\bar{\psi},R^n/F)$ es carta de $\bar{r}$, estando $\bar{\psi}: U\times R^n/F \longrightarrow \bar{\pi}^{-1}(U)$ definida por $\bar{\psi}(b,[v])=[\psi(b,v)]$.

Definición 0.3.15

Sean $r=(M,B,\pi)$ y $r_1=(M_1,B,\pi_1)$ dos fibrados vectoriales y $g:M \longrightarrow M_1$ un B-morfismo. Diremos que g es *localmente directo* si $N=\bigcup_{b\in B} Kerg_b$ y $I=Im(g)=\bigcup_{b\in B} Img_b$ son subfibrados vectoriales de r y r_1 respectivamente.

Como ejemplos de B-morfismos localmente directos tenemos los que son inyectivos en cada fibra y los que son suprayectivos en cada fibra.

Proposición 0.3.16

Sean $r=(M,B,\pi)$ y $r_1=(M_1,B_1,\pi_1)$ fibrados vectoriales, $M'\subset M$ un subfibrado vectorial de r, $f:B \longrightarrow B_1$ una aplicación C^∞ y $g:M \longrightarrow M_1$ un f-morfismo tal que $g_b(M'_b)=0_{f(b)}$ para todo $b\in B$. Entonces, existe un único f-morfismo $\bar{g}:M/M' \longrightarrow M_1$ tal que $\bar{g}\circ p=g$ ($\bar{g}$ está definido por $\bar{g}([x])=g(x)$).

Observación.

En las condiciones de 0.3.15, $g:M/Kerg \longrightarrow Img$ es un B-isomorfismo.

Proposición 0.3.17

Sean $r=(M,B,\pi)$ y $r'=(M',B,\pi')$ dos fibrados vectoriales y $f:M \longrightarrow M'$ un B-morfismo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) f es localmente directo.

b) $\mathrm{Im}f$ es un subfibrado vectorial de r'.

c) $\mathrm{Ker}f$ es un subfibrado vectorial de r.

0.3.18 FIBRADOS TANGENTE DE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE Y FIBRADO NORMAL DE UNA SUBVARIEDAD DE LA MISMA.

Sean B una variedad, $M=TB=\sum_{b\in B} T_bB$, $\tau_B: M\longrightarrow B$ definida por $\tau_B(b,v)=b$ y $r=(TB,B,\tau_B)$.

Dada $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$, carta de B, se construye $t_c=(U,\psi,\mathbb{R}^n)$ carta vectorial de r, donde $\psi: U\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \tau_B^{-1}(U)$ es biyectiva y el
$$(b,v)\longmapsto (b,\theta_c^b(v))$$

diagrama
$$\begin{tikzcd} U\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \tau_B^{-1}(U) \arrow[d, "\tau_B"] \\ & U \end{tikzcd}$$
es conmutativo.

Se tiene que $V=\{t_c=(U,\psi,\mathbb{R}^n): c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ es carta de B$\}$ es un atlas vectorial de r.

Si $f: B\longrightarrow B'$ es una aplicación C^∞, se verifica que f induce un f-morfismo $Tf: TB\longrightarrow TB'$ definido por $Tf(x,v)=(f(x),T_xf(v))$. Consideremos ahora B' subvariedad de B y sea $j: B'\hookrightarrow B$ la inclusión. Entonces se tiene el j-morfismo Tj. Según la construcción de 0.3.9, se tiene un único B'-morfismo $T_*j: TB'\longrightarrow j^*(TB)$ tal que $\tilde{j}\circ T_*j=Tj$.

$$
\begin{tikzcd}
TB' \arrow[rr, "Tj"] \arrow[dd, "\tau_{B'}"'] \arrow[dr, "T_*j"] & & TB \arrow[dd, "\tau_B"] \\
& j^*(TB) \arrow[ur, "\tilde{j}"'] \arrow[dl, "j^*(\pi)"] & \\
B' \arrow[rr, "j"] & & B
\end{tikzcd}
$$

Como T_*j es inyectivo en cada fibra, $T_*j(TB')$ es un subfibrado de $j^*(TB)$ y se define el *fibrado vectorial normal* de B' en B como $j^*(TB)/\ T_*j(TB')\equiv\nu(B')$.

Definición 0.3.19

Sea B una variedad. Se dice que B admite una ***métrica riemanniana***, si existe $g=\{g_x\}_{x\in B}$ familia de productos escalares sobre T_xB, $x\in B$, tal que la aplicación $(x,y,z)\longrightarrow g_x(y,z)\in\mathbb{R}$, definida en $\{(x,y,z)\in B\times TB\times TB: \pi(y)=\pi(z)=x\}$ es C^∞.

Una ***variedad riemanniana*** es un par (B,g) donde $g=\{g_x\}_{x\in B}$ es métrica riemanniana en B.

0.3.20 Caso particular.

Sean B' una subvariedad de una variedad riemanniana (B,g), $j: B' \hookrightarrow B$ la inclusión y para cada $x\in B'$ $T_xj: T_xB'\longrightarrow T_xB$. Para todo $x\in B'$ denotaremos por N_xB al subespacio de T_xB ortogonal a $T_xj(T_xB')$ respecto de g_x. Sea $NB'=\sum_{x\in B'} N_xB$. Entonces, NB' es un subfibrado de $\tau_B^{-1}(B')=j^*(TB)$ y $p|_{NB'}: NB'\longrightarrow\nu(B')\equiv j^*(TB)/T_*j(TB')$ es un B'-isomorfismo.

Utilizaremos, en capítulos posteriores, una u otra descripción del fibrado normal de una subvariedad, según nos interese.

Proposición 0.3.21

Sean M^{n+k} y N^{n+s} variedades de dimensiones $n+k$ y $n+s$ respectivamente, N^s una subvariedad de N^{n+s} sin borde y de dimensión s, contenida en $\mathrm{Int}(N^{n+s})$, y $f: M^{n+k} \longrightarrow N^{n+s}$ una aplicación C^∞ transversal a N^s. Denotemos por M^k a la subvariedad, de M^{n+k}, $f^{-1}(N^s)$. Se verifica que los fibrados vectoriales $\upsilon(M^k)$ y $f^*(\upsilon(N^s))$ son M^k-isomorfos. Por tanto, si $\upsilon(N^s)$ es trivializable se verifica que $\upsilon(M^k)$ es trivializable.

Demostración

Consideremos el f-morfismo $Tf: TM^{n+k} \longrightarrow TN^{n+s}$. Tf induce un f-morfismo de clase C^∞ $Tf|_{\tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k)}: \tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k) \longrightarrow \tau^{-1}_{N^{n+s}}(N^s)$

$(\tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k) = \sum_{x \in M^k} T_x M^{n+k}$ y $\tau^{-1}_{N^{n+s}}(N^s) = \sum_{y \in N^s} T_y N^{n+s})$.

Consideremos el N^s-morfismo proyección $p: \tau^{-1}_{N^{n+s}}(N^s) \longrightarrow \upsilon(N^s)$. Así pues, $p \circ Tf|_{\tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k)}: \tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k) \longrightarrow \upsilon(N^s)$ es un f-morfismo y existe un único $\tilde{T}f: \tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k) \longrightarrow f^*(\upsilon(N^s))$, M^k-morfismo, definido por $\tilde{T}f(x,v) = (x, f(x), [T_x f(v)])$ que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k) \arrow[rr, "p\circ Tf|_{\tau^{-1}_{M^{n+k}}(M^k)}"] \arrow[dr, "\tilde{T}f"] \arrow[dd] & & \nu(N^s) \arrow[dd] \\
& f^*(\nu(N^s)) \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
M^k \arrow[rr, "f"] & & N^s
\end{tikzcd}
$$

Si $j:M^k \hookrightarrow M^{n+k}$ es la inclusión, $\tilde{T}f|_{T_*j(TM^k)}=0$, así $\tilde{T}f$ induce un M^k-isomorfismo $\overline{\tilde{T}f}:\nu(M^k)\longrightarrow f^*(\nu(N^s))$. La última afirmación es consecuencia de 0.3.10.■

0.4 ENTORNOS TUBULARES. ([31] Tomo III pgs: 47-56).

Definición 0.4.1

Sean Y y X variedades y $g: Y \longrightarrow X$ una inmersión difeomórfica. Se llama *entorno tubular de* Y *en* X a un fibrado vectorial (M, Y, π), un entorno abierto Z de la sección cero, $\mathcal{T}_M(Y)$, un entorno abierto U de $g(Y)$ en X y un difeomorfismo $f: Z \longrightarrow U$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] & X \\ & Y \arrow[ul, "\mathcal{T}_M"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $\mathcal{T}_M(y)=0_y$ (0_y es el cero de la fibra M_y).

Teorema 0.4.2

Sea X una variedad paracompacta y T_2. Entonces, si Y es una subvariedad bien situada y cerrada de X, se verifica que Y admite un entorno tubular en X.

Conviene hacer algunas observaciones de interés, acerca de la naturaleza del entorno tubular que se construye en la demostración del Teorema 0.4.2. Supongamos que $\partial X=\partial Y=\emptyset$, con $\upsilon(Y)$ el fibrado vectorial normal de Y en X, y D un entorno abierto de la sección cero de $\upsilon(Y)$, suficientemente pequeño.

Se define una aplicación (que es un difeomorfismo) $exp: D \longrightarrow exp(D)=V\subset X$, V abierto de X. Además, si $y\in Y$ $c=(U,\psi,\mathbb{R}^{n+m})$ es una carta de X adaptable a Y, en y, con $\psi(U\cap Y)=\psi(U)\cap(\mathbb{R}^m\times\{0\})$, se tiene que $c_1=(U\cap Y,\psi|_{U\cap Y}=\bar{\psi},\mathbb{R}^m)$ es una carta de Y. Sea $t=(U\cap Y,\lambda,\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ una carta vectorial de $\tau_X^{-1}(Y)$ tal que

$\lambda^{-1}(\tau_X^{-1}(U\cap Y)\cap\upsilon(Y))=(U\cap Y)\times(\{0\}\times\mathbb{R}^n)$. Entonces, $t_1=(U\cap Y,\lambda|_{(U\cap Y)\times(\{0\}\times\mathbb{R}^n)},\{0\}\times\mathbb{R}^n)$ es una carta vectorial de $\upsilon(Y)$ y por tanto

$$\begin{array}{rcl}\alpha:\tau_X^{-1}(U\cap Y)\cap\upsilon(Y) & \longrightarrow & \bar{\psi}(U\cap Y)\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \\ (y,v) & \longmapsto & (\bar{\psi}(y),t_{1_y}^{-1}(v))\end{array}$$

es una carta de la variedad $\upsilon(Y)$ y se verifica que $D(\psi\circ exp\circ\alpha^{-1})(\bar{\psi}(x),0)(v_1,v_2)=v_1+(\Theta_c^x)^{-1}t_{1_x}(v_2)$.

0.5. VARIEDADES ORIENTABLES. GRADO EN VARIEDADES ORIENTADAS.

([17], capítulos 4 y 5)

Sea X una variedad con $\dim_x X=n$ para todo $x\in X$.

Definición 0.5.1

Diremos que X es *orientable*, si existe $\mathcal{A}$, atlas C^∞ de X (por supuesto compatible con la estructura diferenciable de X) tal que para todo par de cartas $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ y $c'=(U',\varphi',\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{A}$, se verifica la propiedad *V.O.*: " para todo $x\in U\cap U'$ $\det D(\varphi'\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))>0$".

Si X es orientable y $\mathcal{A}$ cumple la propiedad *V.O.*, se tiene que $\theta=\{c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$: para cada $c'\in\mathcal{A}$, c y c' verifican *V.O.*$\}$ es un atlas C^∞ maximal, respecto de la propiedad *V.O.*, y al par (X,θ) se le denomina *variedad orientada*.

Si (X,θ) es una variedad orientada, para cada $x\in X$, θ induce una única orientación θ_x en T_xX tal que para toda carta c de θ, $\theta_c^x:\mathbb{R}^n\longrightarrow T_xX$ es un isomorfismo conservando la orientación, supuesto $\mathbb{R}^n$ con la orientación usual, y θ_x no depende de la carta de θ.

Consideremos ahora (X,θ) y (X',θ') dos variedades orientadas, compactas con $\partial X=\partial X'=\emptyset$, $\dim_x X=\dim_{x'}X'$ para todo $x\in X$ y $x'\in X'$, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación C^∞ y $x'\in X'$ un valor regular de f. Entonces la Prop. 0.2.21 nos permite asegurar que $f^{-1}(x')=\{x_1,\dots,x_p\}\subset X$ y $T_{x_i}f:T_{x_i}X\longrightarrow T_{x'}X'$ es un isomorfismo para cada $i=1,2,3,\dots,p$. Sean $c_i=(U_i,\varphi_i,\mathbb{R}^n)$ cartas de θ con $x_i\in U_i$ para cada $i=1,2,\dots,p$ y $c'=(U',\varphi',\mathbb{R}^n)$ una carta de θ' con $x'\in U'$. En estas condiciones, se define el *grado de f en x'*, y se denotará por $d(f,x')$, como $d(f,x')=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{sig}(\det D(\varphi'\circ f\circ\varphi_i^{-1})(\varphi_i(x_i)))=$

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{sig}T_{x_i} f \text{ donde } \mathrm{sig}T_{x_i} f = \begin{cases} 1 \text{ si } T_{x_i} f \text{ conserva la orientación} \\ -1 \text{ si } T_{x_i} f \text{ invierte la orientación} \end{cases}.$$

Lema 0.5.2

Sea (M,θ) una variedad orientada. Entonces, (M,θ) induce una orientación $\theta|_{\partial M}$ sobre ∂M.

Desde ahora y en lo que resta de sección, X y X' serán variedades orientadas, compactas, $\dim_x X = \dim_{x'} X' = n$ para todo $x \in X$ y $x' \in X'$, sin borde y X' conexa. No se indicarán las orientaciones salvo cuando pudiera haber confusión.

Proposición 0.5.3

Sea $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación C^∞ y $p,q \in X'$ dos valores regulares de f. Se verifica que $d(f,p)=d(f,q)$. Por tanto es consistente las siguiente definición.

Definición 0.5.4

Sea $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación C^∞. Se define el grado de f, y se denotará por $d(f)$, como el valor $d(f,p)$, donde p es un elemento de $(v.r.)(f)$ cualquiera.

Lema 0.5.5

a) Para cada aplicación continua $g: X \longrightarrow X'$, existe una aplicación C^∞ $f: X \longrightarrow X'$ homótopa a ella.

b) Si $f_1, f_2: X \longrightarrow X'$ son aplicaciones C^∞ homótopas, se verifica que son homótopas por una homotopía de clase C^∞.

Definición 0.5.6

Sea $g:X \longrightarrow X'$ una aplicación continua. Se define el grado de g, y se denotará por $d(g)$, como $d(f)$, donde $f:X \longrightarrow X'$ es una aplicación C^{∞} cualquiera homótopa a g.

Teorema 0.5.7

a) Sean $f, f':X \longrightarrow X'$ aplicaciones continuas. Si f es homótopa a f', se tiene que $d(f)=d(f')$.

b) Si $f:X \longrightarrow X'$ es una aplicación continua y $d(f)\neq 0$, se cumple que f es sobreyectiva.

c) Si M es una variedad orientada, $\partial M=X$, y la aplicación $f:X \longrightarrow X'$ admite una extensión continua $\tilde{f}:M \longrightarrow X'$, se verifica que $d(f)=0$.

d) Teorema de Hopf. Sea X una variedad conexa y sean $g, f:X \longrightarrow S^n$ dos aplicaciones continuas. Entonces, $d(f)=d(g)$ si y solamente si f y g son homótopas.

0.6 VARIEDADES NORMALMENTE REFERENCIADAS Y TEORIA DE HOMOTOPIA. ([29] pgs. 41-112)

Definición 0.6.1

Sea M^k una subvariedad compacta de dimensión k de R^{n+k} y $F=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ una familia de secciones C^p del fibrado normal $\upsilon(M^k)$ de M^k en R^{n+k}. Diremos que F es una *referencia normal para* M^k, si $\{u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x)\}$ es un sistema linealmente independiente para cada $x\in M^k$.

Una *k-variedad normalmente referenciada* de R^{n+k} (k-V.N.R.) ($k\in N\cup\{0\}$) es un par (M^k,F), donde M^k es una subvariedad compacta de dimensión k, sin borde, de R^{n+k} y $F=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ es una referencia normal C^∞ para M^k.

Observaciones.

1) Toda k-variedad normalmente referenciada de R^{n+k}, (M^k,F) es orientable. En efecto: diremos que una base $\{b_1,b_2,\dots,b_k\}$ de T_xM^k es positiva si $\{T_xj(b_1),\dots,T_xj(b_k),u_1(x),\dots,u_n(x)\}$ es una base positiva de T_xR^{n+k}. De esta manera se construye una orientación de M^k.

2) Si (M^k,F) es una k-V.N.R. de R^{n+k}, se verifica que su espacio fibrado vectorial normal en R^{n+k}, $\upsilon(M^k)$, es trivializable. Además, $\upsilon(M^k)$ se puede considerar como un subfibrado de $T_MxR^{n+k}=\sum_{x\in M^k}T_xR^{n+k}$ (0.3.20).

Por otro lado, si $c=(R^{n+k},\mathrm{Id},R^{n+k})$ es la carta natural de la variedad R^{n+k}, la aplicación $\begin{array}{l}\varphi_c:R^{n+k}xR^{n+k}\longrightarrow TR^{n+k}\\ \quad (x,v)\longmapsto(x,\theta_c^x(v))\end{array}$ da una trivialización del espacio fibrado vectorial tangente de

$\mathbb{R}^{n+k}$, $(T\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k}, \tau_{\mathbb{R}^{n+k}})$. Así, por las propiedades de la construcción del espacio fibrado vectorial imagen inversa $\varphi_C|_{M^k \times \mathbb{R}^{n+k}}: M^k \times \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow j^*(T\mathbb{R}^{n+k}) = T_{M^k}\mathbb{R}^{n+k}$ $(j: M^k \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k})$ da una trivialización del espacio fibrado $(T_{M^k}\mathbb{R}^{n+k}, M^k, \tau_{\mathbb{R}^{n+k}}|_{T_{M^k}\mathbb{R}^{n+k}})$.

Teniendo en cuenta 0.3.20 y las trivializaciones anteriores, el espacio fibrado normal de M^k en $\mathbb{R}^{n+k}$, se identifica con $\upsilon(M^k) = \{(x,v): x \in M^k,\ v$ es ortogonal a $(\Theta_C^x)^{-1}(T_x j(T_x M^k))$ en $\mathbb{R}^{n+k}\}$ como subfibrado de $M^k \times \mathbb{R}^{n+k}$. La referencia normal F se identifica con $\bar{F} = \{\bar{u}_1 = (\Theta_C^x)^{-1} \circ u_1, \ldots, \bar{u}_n = (\Theta_C^x)^{-1} \circ u_n\}$. Es decir, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, $\bar{u}_i: M^k \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ es aplicación C^∞ tal que para todo $x \in M^k$ $\{\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \ldots, \bar{u}_n(x)\}$ son linealmente independientes y están contenidos en $\upsilon_x(M^k) = ((\Theta_C^x)^{-1}(T_x j(T_x M^k)))^{\perp}$ y el entorno tubular dado por el Teorema 0.4.2 está dado por $exp: \begin{array}{l} D \longrightarrow V \\ (x,v) \longmapsto x+v \end{array}$ (D es un abierto conteniendo la imagen de la sección cero de $\upsilon(M^k)$).

Definición 0.6.2

Sean (M_1^k, F_1) y (M_2^k, F_2) k-V.N.R. de $\mathbb{R}^{n+k}$. Diremos que son *homólogas*, y lo denotaremos por $(M_1^k, F_1) \simeq (M_2^k, F_2)$ si existe una variedad compacta M^{k+1} de $\mathbb{R}^{n+k} \times I$ y existe una referencia normal C^∞ F para M^{k+1} tales que:

a) $\partial M^{k+1} = (M^{k+1} \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{0\})) \cup (M^{k+1} \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{1\}))$.

b) Existe $\delta > 0$ con $M^{k+1} \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{t\}) = M_1^k \times \{t\}$ para cada $t \in [0, \delta)$ y $M^{k+1} \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{t\}) = M_2^k \times \{t\}$ para cada $t \in (1-\delta, 1]$. $(\delta < 1/2)$.

c) $F|_{M_1 \times \{0\}} = F_1$ y $F|_{M_2 \times \{1\}} = F_2$.

Proposición 0.6.3

La relación $\approx$ es una relación de equivalencia.

Definición 0.6.4

Sea $\mathfrak{J}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})=\{(M^k,F):(M^k,F)$ es una k-V.N.R. de $\mathbb{R}^{n+k}\}/\approx$.

Consideremos ahora una aplicación diferenciable $f:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ y denotemos por q' y p' los polos Norte y Sur de S^{n+k} respectivamente y por q y p los de S^n. Sea $\varphi_{n+k}:\mathbb{R}^{n+k}\longrightarrow S^{n+k}\setminus\{q'\}$ y $\varphi_n:\mathbb{R}^n\longrightarrow S^n\setminus\{q\}$ las inversas de las proyecciones estereográficas desde q' y q respectivamente. Sea $s\in S^n$ un valor regular de f, con $s\neq f(q')$, y $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base positiva de T_sS^n en la orientación usual de S^n. Entonces, $f\circ\varphi_{n+k}:\mathbb{R}^{n+k}\longrightarrow S^n$ es una aplicación diferenciable y $s\in(\text{v.r.})(f\circ\varphi_{n+k})$. A partir de f, s y V, podemos construir $M_f^k=(f\circ\varphi_{n+k})^{-1}(s)$ variedad compacta, sin borde, de dimensión k de $\mathbb{R}^{n+k}$ y F_f^V referencia normal para M_f^k, $F_f^V=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$, donde $T_x(f\circ\varphi_{n+k})(\theta_c^x(u_j(x)))=v_j$ (considerando $\nu(M_f^k)$ como subfibrado de $M_f^k\times\mathbb{R}^{n+k}$). De esta manera queda definida una correspondencia $(f;s,V)\longmapsto[(M_f^k,F_f^V)]\in\mathfrak{J}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})$.

Teorema 0.6.5

Sean $f_0,f_1:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ aplicaciones diferenciables, $p_0\in(\text{v.r.})(f_0)$ con $p_0\neq f_0(q')$ y $p_1\in(\text{v.r.})(f_1)$ con $p_1\neq f_1(q')$, V y W bases positivas de $T_{p_0}S^n$ y $T_{p_1}S^n$ respectivamente. Entonces, si f_0 y f_1 son homótopas, se verifica que $[(M_{f_0}^k,F_{f_0}^V)]=[(M_{f_1}^k,F_{f_1}^W)]$.

Corolario 0.6.6

Como consecuencia del teorema anterior y de que existe una isotopía C^∞, $H:S^n\times I\longrightarrow S^n$ con $H_0=\mathrm{Id}$, $H_1(p_0)=p_1$ y $T_{p_0}H_1(V)=W$, el elemento de $\mathfrak{F}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})$, $[(M^k_{f_0},F^V_{f_0})]$, no depende ni de V ni de p_0 y así se tiene una aplicación bien definida $\Pi^k_n:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\mathfrak{F}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})$

$$[f]\longmapsto[(M^k_f,F^V_f)]$$

Teorema 0.6.7

La aplicación $\Pi^k_n:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\mathfrak{F}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})$ es biyectiva.

Nuestro siguiente objetivo es definir en $\mathfrak{F}_c^k(\mathbb{R}^{n+k})$ una operación que le convierta en grupo abeliano, de manera que Π^k_n sea un isomorfismo. Para ello establecemos el siguiente lema

Lema 0.6.8

Sea $e:M^k\times I\longrightarrow\mathbb{R}^{n+k}$ una isotopía C^∞, $(e_0=\mathrm{Id})$, y sea $\tilde{e}:M^k\times I\longrightarrow\mathbb{R}^{n+k}\times I$ $(x,t)\longmapsto(e(x,t),t)$ tal que $\tilde{e}|_{M^k\times[0,\delta)}=e_0\times\mathrm{Id}$ y $\tilde{e}|_{M^k\times(1-\delta,1]}=e_1\times\mathrm{Id}$ para algún $\delta>0$. Supongamos que F es una referencia normal para M^k. Entonces, existe $\tilde{e}(F)$ referencia normal para $\tilde{e}(M^k\times I)$, tal que $\tilde{e}(F)|_{M^k\times\{0\}}=F$ y $\tilde{e}(F)|_{e_1(M^k)\times\{1\}}\subset\mathbb{R}^{n+k}\times\{0\}$. Por tanto $(M^k,F)\approx(e_1(M^k),\tilde{e}(F)|_{e_1(M^k)\times\{1\}})$.

En virtud de este lema, si tenemos $[(M^k_1,F_1)]$ y $[(M^k_2,F_2)]$ dos elementos de $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^{n+k})$, podemos elegir representantes $(M_1'^k,F_1')$ y $(M_2'^k,F_2')$ de $[(M^k_1,F_1)]$ y $[(M^k_2,F_2)]$ respectivamente, tales que $M_1'^k$ y $M_2'^k$ estén separados por un hiperplano. Se define entonces, $[(M_1'^k,F_1')]+[(M_2'^k,F_2')]=[(M_1'^k\cup M_2'^k),(F_1'\cup F_2')]$ donde $(F_1'\cup F_2')(x)$ se entiende que es $F'_1(x)$ si $x\in M_1'^k$ y $F'_2(x)$ si $x\in M_2'^k$.

Proposición 0.6.9

La operación + en $\mathfrak{F}^k_c(R^{n+k})$ está bien definida y dota a $\mathfrak{F}^k(R^{n+k})$ de una estructura de grupo abeliano tal que $\Pi^k_n:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\mathfrak{F}^k_c(R^{n+k})$ es un isomorfismo.

Lema 0.6.10

La clasificación de los elementos de $\mathfrak{F}^k_c(R^{n+k})$ se reduce a la de las clases $[(M^k,F)]$ de $\mathfrak{F}^k_c(R^{n+k})$ con F ortonormal.

Definición 0.6.11

Sean M^k una subvariedad compacta, sin borde de $R^{n+k}\subset R^{n+k+1}$, $F=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una referencia normal para M^k en R^{n+k} y $e_{n+k+1}=(0,0,\dots,0,1)\in R^{n+k+1}$. Definimos $E:\mathfrak{F}^k_c(R^{n+k})\longrightarrow\mathfrak{F}^k_c(R^{n+k+1})$ por $E([(M^k,F)])=[(M^k,\{v_1,v_2,\dots,v_n,e_{n+k+1}\})]$. Denotaremos por $E(F)$ a la referencia normal de M^k $\{v_1,v_2,\dots,v_n,e_{n+k+1}\}$. Es fácil verificar que E es un homomorfismo bien definido.

Proposición 0.6.12

El siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{n+k}(S^n) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi^k_n"'] & \Pi_{n+k+1}(S^{n+1}) \arrow[d, "\Pi^k_{n+1}"] \\
\mathfrak{F}^k_c(R^{n+k}) \arrow[r, "E"] & \mathfrak{F}^k_c(R^{n+k+1})
\end{tikzcd}$$

donde Σ es el homomorfismo suspensión, es conmutativo.

Proposición 0.6.13

Sean M^k una subvariedad compacta y sin borde de $R^{n+k} \subset R^{n+k+1}$, F una referencia normal para M^k en R^{n+k+1} tal que $F(x)=\{u_1(x),\ldots,u_{n+1}(x)\}$ es un sistema ortonormal para todo $x \in M^k$. Entonces, $e_{n+k+1}=\psi_1(x)u_1(x)+\cdots\cdots+\psi_{n+1}(x)u_{n+1}(x)$ para todo $x \in M^k$ y se tiene una aplicación C^∞ $\psi: M^k \longrightarrow S^n$.

$$x \longmapsto \psi(x)=(\psi_1(x),\ldots,\psi_{n+1}(x))$$

Si ψ es homótopa a una aplicación constante, se verifica que existe U, referencia normal para M^k en R^{n+k} tal que $E([(M^k,F)])=[(M^k,E(U))]=[(M^k,F)]$.

Teorema 0.6.14

El homomorfismo $E: \mathfrak{F}_c^k(R^{n+k}) \longrightarrow \mathfrak{F}_c^k(R^{n+k+1})$ es un epimorfismo si $n \geq k+1$ y es un isomorfismo si $n \geq k+2$.

Invariante de Hopf de aplicaciones continuas de S^{2k+1} en S^{k+1}

Definición 0.6.15

Sean M^k y N^s dos variedades orientadas, sin borde, compactas, de dimensiones k y s respectivamente y sean $f: M^k \longrightarrow R^{s+k+1}$ y $g: N^s \longrightarrow R^{s+k+1}$ aplicaciones continuas tales que $f(M^k) \cap g(N^s)=\emptyset$. Consideremos la aplicación continua $\chi: M^k \times N^s \longrightarrow S^{k+s}$.

$$(x,y) \longmapsto \frac{g(y)-f(x)}{\|g(y)-f(x)\|}$$

Al grado de la aplicación χ, $d(\chi)$, que designaremos por $L((f,M^k),(g,N^s))$, se le llama *número de enlace* de (f,M^k) y (g,N^s). Es evidente que si se tienen $H: M^k \times I \longrightarrow R^{s+k+1}$ y $G: N^s \times I \longrightarrow R^{s+k+1}$ aplicaciones continuas, tales que $H_t(M^k) \cap G_t(N^s)=\emptyset$ para cada $t \in I$, se verifica que $L((H_0,M^k),(G_0,N^s))=L((H_1,M^k),(G_1,N^s))$.

Lema 0.6.16

En las hipótesis anteriores, si $f:M^k \longrightarrow R^{s+k+1}$ y $g:N^s \longrightarrow R^{s+k+1}$ son aplicaciones continuas con $f(M^k)\cap g(N^s)=\emptyset$, se cumple que $L((g,N^s),(f,M^k))=(-1)^{(k+1)(s+1)}L((f,M^k),(g,N^s))$.

Lema 0.6.17

Supongamos que existe una variedad compacta, orientada, con borde, N^{s+1}, cuyo borde orientado consiste en la variedades N_0^s y $-N_1^s$. Sea $g:N^{s+1} \longrightarrow R^{s+k+1}$ y $f:M^k \longrightarrow R^{s+k+1}$ aplicaciones continuas tales que $g(N^{s+1})\cap f(M^k)=\emptyset$. Si denotamos por $g_0=g|_{N_0^s}$ y $g_1=g|_{N_1^s}$, se verifica que $L((f,M^k),(g_0,N_0^s))=L((f,M^k),(g_1,N_1^s))$. En particular, si M^k y N^s son subvariedades orientadas y compactas, de R^{s+k+1} y existe una subvariedad orientada y compacta N^{s+1} de R^{s+k+1} tal que $\partial N^{s+1}=N^s$ y $M^k\cap N^{s+1}=\emptyset$, se verifica que $L((i,M^k),(j,N^s))=0$.

Definición 0.6.18

Sea $f:S^{2k+1} \longrightarrow S^{k+1}$ una aplicación diferenciable y sean a_0 y a_1, pertenecientes a $S^n\setminus\{f(q')\}$, dos valores regulares de f. Entonces, $M_0^k=(f\circ\varphi_{2k+1})^{-1}(a_0)$ y $M_1^k=(f\circ\varphi_{2k+1})(a_1)$ son subvariedades orientadas, compactas y sin borde, de R^{2k+1}, de dimensión k. Se define el *invariante de Hopf de f* y se denotará por $\gamma(f)$, como $\gamma(f)=\gamma(f;a_0,a_1)=L((i_0,M_0^k),(i_1,M_1^k))$, donde $i_j:M_j^k \hookrightarrow R^{2k+1}$ $j=0,1$ son las inclusiones.

Proposición 0.6.19

En las hipótesis anteriores, $\gamma(f)$ es un invariante de la clase de homotopía de f. En particular, $\gamma(f)$ no depende de los puntos a_0 y a_1 que se tomen y para valores pares de k, el invariante es siempre cero. Además, $\gamma:\Pi_{2k+1}(S^{k+1})\longrightarrow Z$ es un homomorfismo.

Dado el isomorfismo $\Pi^k_{k+1}:\Pi_{2k+1}(S^{k+1})\longrightarrow \mathfrak{F}^k_c(R^{2k+1})$, es interesante tener descripciones de γ para elementos de $\mathfrak{F}^k_c(R^{2k+1})$ directamente, sin necesidad de pasar a $\Pi_{2k+1}(S^{k+1})$ mediante $(\Pi^k_{k+1})^{-1}$. El siguiente teorema nos da una de estas descripciones.

Teorema 0.6.20

Sea (M^k,U) una k-V.N.R. de R^{2k+1} con $U=\{u_1,u_2,\dots,u_{k+1}\}$ y sea $c=(c_1,c_2,\dots,c_{k+1})$ un vector arbitrario de $R^{k+1}\setminus\{0\}$. Sea $C:M^k\longrightarrow R^{2k+1}$ la aplicación C^∞ definida por $C(x)=x+c_1u_1(x)+\cdots+c_{k+1}u_{k+1}(x)$. Entonces, si $c\neq 0$, es claro que M^k y $C(M^k)$ no se cortan. Además si $\|c\|$ es suficientemente pequeño, C es una inmersión difeomórfica y $L((i,M^k),(j,C(M^k)))$ = $L((i,M^k),(j',C'(M^k)))$ para cualquier otro $c'\in R^{k+1}$ con $\|c'\|$ suficientemente pequeño y se tiene que $\gamma([(M^k,U)])=$ $L((i,M^k),(j,C(M^k)))$.

El siguiente teorema nos da una nueva descripción del invariante de Hopf, que será generalizado en un capítulo posterior.

Teorema 0.6.21

Sea (M^k,U) una k-V.N.R. de R^{2k+1} con $U=\{u_1,u_2,\dots,u_{k+1}\}$ referencia ortonormal para M^k en R^{2k+1} y supongamos que $M^k\subset R^{2k}$. Se tiene que para todo $x\in M^k$, $e_{2k+1}=\psi_1(x)u_1(x)+\cdots\cdots+\psi_{k+1}(x)u_{k+1}(x)$, donde $(\psi_1(x),\dots,\psi_{k+1}(x))$ es un vector unitario de R^{k+1}, por tanto, se tiene una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned}\psi: M^k &\longrightarrow S^k \\ x &\longmapsto \psi(x)=(\psi_1(x),\dots,\psi_{k+1}(x))\end{aligned}$$

. Entonces,

$d(\psi)=(\pm1)\gamma([(M^k,U)])$

donde el signo ±1 solo depende de k.

Corolario 0.6.22

Sea $f:S^{2k+1}\longrightarrow S^{k+1}$ una aplicación continua y $\Pi^k_{k+1}([f])=[(M^k,U)]$ con $M^k\subset R^{2k}$. Entonces $\gamma(f)=0$ si y solamente si $[f]\in\mathrm{Im}\Sigma$.

Teorema 0.6.23

Sea $[(M^k,U)]\in\mathfrak{J}^k_c(R^{n+k})$. Entonces:

a) $[(M^k,U)]=[(M^k_1,V)]$ donde M^k_1 es conexa.

b) Si $n\geq k+1$, se verifica que $[(M^k,U)]=[(M^k_1,V)]$ donde M^k_1 es conexa y $M^k_1\subset R^{2k}$.

Corolario 0.6.24

Si $f:S^{2k+1}\longrightarrow S^{k+1}$ es una aplicación continua, se verifica que $\gamma(f)=0$ si y solamente si $f\in\mathrm{Im}\Sigma$.

Aplicación de Hopf de la 3-esfera en la 2-esfera.

Sean $S^1=\{(cosx,senx,0):x\in[0,2\pi]\}\subset\mathbb{R}^3$ y $u_1(x)=(cosx,senx,0)$, $u_2(x)=(0,0,1)$ y $U=\{u_1,u_2\}$. Se considera el isomorfismo $\Pi_2^1:\Pi_3(S^2)\longrightarrow\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^3)$. Se tiene que $(\Pi_2^1)^{-1}([(S^1,U)])=0$ pues $[(S^1,U)]\in ImE$, donde $E:\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^2)\longrightarrow\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^3)$ es el homomorfismo suspensión, y $\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^2)=\Pi_2(S^1)=0$. Consideremos también $v_1^r(x)=cos(rx)u_1(x)+sen(rx)u_2(x)$ y $v_2^r(x)=-sen(rx)u_1(x)+cos(rx)u_2(x)$ y $V^r=\{v_1^r,v_2^r\}$ y $[(S^1,V^r)]\in\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^3)$.

Proposición 0.6.25

En las condiciones anteriores, $\gamma:\Pi_3(S^2)\longrightarrow\mathbb{Z}$ es un isomorfismo y $\gamma([(S^1,V^r)])=r$.

Definición 0.6.26

$(\Pi_2^1)^{-1}([(S^1,V^1)])\in\Pi_3(S^2)$ es el generador de $\Pi_3(S^2)$ y le denominaremos *clase de Hopf* o *aplicación de Hopf*.

Proposición 0.6.27

$\Sigma:\Pi_3(S^2)\longrightarrow\Pi_4(S^3)$ es un epimorfismo, $\Pi_4(S^3)\approx\mathbb{Z}_2$ y $\Sigma([f])$ es el generador de $\Pi_4(S^3)$, donde $[f]$ es la clase de Hopf. Además, $\Sigma:\Pi_{n+1}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+2}(S^{n+1})$ es un isomorfismo para $n\geq3$. Por tanto, $\Pi_{n+1}(S^n)\approx\mathbb{Z}_2$ para $n\geq3$.

Proposición 0.6.28

$\Pi_{n+2}(S^n)\approx\mathbb{Z}_2$ para $n\geq2$ y $\Sigma:\Pi_{n+2}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+3}(S^{n+1})$ es un isomorfismo para $n\geq2$.

CAPITULO I

GRADO GENERALIZADO.

I.0. Introducción

En 1986 se publica un artículo de K.Geba, I.Massabó y A.Vignoli titulado *Generalized degree and bifurcation* ([15]), en el que se presenta una teoría del grado para aplicaciones continuas $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, donde U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, y f no se anula en el borde de U.

Vamos a establecer la definición y propiedades mas importantes de este grado.

Para $r\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_r:\mathbb{R}^r\longrightarrow S^r\setminus\{q\}$ la inversa de la proyección estereográfica (q es el polo Norte de S^r). Si p es el polo Sur, entonces $\varphi_r(0)=p$. Sea $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua. Se considera la aplicación continua $\varphi_n\circ f\circ\varphi_{n+k}^{-1}\big|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})}:(\varphi_{n+k}(\bar{U}),\partial\varphi_{n+k}(U))\longrightarrow(S^n\setminus\{q\},S^n\setminus\{p,q\})$ y sea $\tilde{f}:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ una extensión continua de $\varphi_n\circ f\circ\varphi_{n+k}^{-1}\big|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})}$ a S^{n+k} tal que $\tilde{f}(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(\bar{U}))\subset S^n\setminus\{p\}$. La clase de homotopía de $\tilde{f}$ no depende de la extensión de $\varphi_n\circ f\circ\varphi_{n+k}^{-1}\big|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})}$ que se tome y entonces se define $D(f,U)=[\tilde{f}]\in\Pi_{n+k}(S^n)$.

Se verifican las siguientes propiedades ([15], pgs.62-63):

1.-Invariancia por homotopías.

Sea $H:(\bar{U}\times I,\partial U\times I)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua. Entonces, $D(H_0,U)=D(H_1,U)=D(H_t,U)$ para todo $t\in(0,1)$.

2.-Escisión.

Sea $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua. Para cada abierto $V\subset U$ tal que f no se anule en $U\setminus V$, se tiene que $D(f,U)=D(f|_{\bar{V}},V)$.

3.-Solución.

Sea $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua tal que $D(f,U)\neq 0$. Entonces f es esencial, es decir, no es homótopa a una aplicación que no se anula en ningún punto de $\bar{U}$, y en particular, existe $x\in U$ con $f(x)=0$ (0 es la clase de homotopía de las aplicaciones constantes de S^{n+k} en S^n).

Es interesante observar que, como en el caso del grado de Brouwer, $D(f,U)$ solo depende de los valores de f en ∂U.

Lema I.0.1

Sean U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua. Entonces, $D(f,U)=[h]\in\Pi_{n+k}(S^n)$, donde $h:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ es una aplicación continua tal que $h|_{\varphi_{n+k}(\partial U)}=\varphi_n\circ f\circ\varphi_{n+k}^{-1}|_{\varphi_{n+k}(\partial U)}$, $h(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(\bar{U}))\subset S^n\setminus\{p\}$ y $h(\varphi_{n+k}(\bar{U}))\subset S^n\setminus\{q\}$.

Demostración.

Con las notaciones anteriores, tenemos que probar que $[\tilde{f}]=[h]$. Como $S^n\setminus\{p\}$ es contractible, existe una homotopía continua $H:(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U))\times I\longrightarrow S^n\setminus\{p\}$ tal que $H_0=h|_{S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U)}$, $H_1=\tilde{f}|_{S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U)}$ y $H(x,t)=\varphi_n\circ f\circ\varphi_{n+k}^{-1}(x)$ para todo $(x,t)\in\varphi_{n+k}(\partial U)\times I$.

De la misma forma, puesto que $S^n\setminus\{q\}$ es contráctil, existe una homotopía continua $F:\varphi_{n+k}(\bar{U})\times I\longrightarrow S^n\setminus\{q\}$ tal que $F_0=h|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})}$, $F_1=\tilde{f}|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})}$ y $F(x,t)=\varphi_n\circ f\circ\varphi_{n+k}^{-1}(x)$ para todo $(x,t)\in\varphi_{n+k}(\partial U)\times I$.

Se considera la aplicación continua $G:S^{n+k}\times I\longrightarrow S^n$ definida por $G|_{(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U))\times I}=H$ y $G|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})\times I}=F$. Es claro que G es una aplicación continua y $G_0=h$ y $G_1=\tilde{f}$.■

Corolario I.0.2

Sean U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $f,g:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ aplicaciones continuas tales que $f|_{\partial U}=g|_{\partial U}$. Entonces, $D(f,U)=D(g,U)$.

4.-Aditividad.

Si U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$, $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ es una aplicación continua y U_1, U_2 son abiertos contenidos en U tales que $U_1\cap U_2=\emptyset$ y $f(x)\neq 0$ para todo $x\in U\setminus(U_1\cup U_2)$, se verifica que $D(f,U)=D(f|_{\bar{U}_1},U_1)+D(f|_{\bar{U}_2},U_2)$ si $k\leq n-4$ o $k=0$.

5.-Normalización.

Si U es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con $0\in U$ y $Id:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ es la identidad, se tiene que $D(Id,U)=[Id_{S^n}]\in\Pi_n(S^n)$.

6.-Suspensión.

Sea U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ con $0\in U$ y $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})$ una aplicación continua, tal que

$f(\bar{U}\cap\mathbb{R}^{n+k+1}_{+})\subset\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ y $f(\bar{U}\cap\mathbb{R}^{n+k+1}_{-})\subset\mathbb{R}^{n+1}_{-}$. Se considera $U_0=U\cap\mathbb{R}^{n+k}$ y $f_0=f|_{U_0}:(\bar{U}_0,\partial U_0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{o\})$. Entonces, $D(f,U)=\Sigma(D(f_0,U_0))$.

Para el caso $k=0$, tenemos un grado que asocia a cada aplicación continua $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{o\})$ un elemento $D(f,U)\in\Pi_n(S^n)\approx\mathbb{Z}$. Por tanto, por el Teorema de Unicidad del grado de Brouwer, las propiedades 1),...,5) implican la coincidencia de $D(f,U)$ con el grado de Brouwer (hecha la identificación $\Pi_n(S^n)\overset{\varphi}{\approx}\mathbb{Z}$ y $\varphi([Id_{S^n}])=1$) y por tanto esta teoría del grado es una generalización de la teoría del grado de Brouwer.

Es interesante observar que la propiedad aditiva solo pudo ser demostrada, en el artículo original, en los casos antes citados. Posteriormente nos detendremos en su estudio y veremos que la propiedad no es cierta en general, y se mejorarán sustancialmente las condiciones suficientes para que se verifique.

Nuestro trabajo se inicia dando otra descripción del grado generalizado que nos permitirá estudiar los problemas, en particular la propiedad aditiva y la invariancia por difeomorfismos, desde otro punto de vista. Utilizaremos técnicas de topología diferencial, y el método que desarrollaremos es paralelo al utilizado para el estudio del grado de Brouwer desde el punto de vista de la topología diferencial.

I.1. UNA CONSTRUCCION ALTERNATIVA DEL GRADO GENERALIZADO.

Sean $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Definición I.1.1

Sea $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una aplicación. Diremos que f es de clase C^∞ o simplemente *diferenciable*, si existe un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$, V, con $U\subset\bar{U}\subset V$, y existe $g:V\longrightarrow\mathbb{R}^n$ aplicación de clase C^∞, en el sentido del cálculo diferencial ordinario, tal que $g|_{\bar{U}}=f$.

Sea $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación diferenciable tal que $0\in(\text{v.r.})(f|_U)$. En estas condiciones, se tiene automáticamente asociado un par (M^k_f,F_f), k-variedad normalmente referenciada C^∞, donde $M^k_f=f^{-1}(0)\subset U$ y $F_f=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ con $Df(x)(u_j(x))=e_j$ para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ y todo $x\in M^k_f$ (ver 0.6.1).

Definición I.1.2

Si $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ es una aplicación diferenciable y $0\in(\text{v.r.})(f|_U)$, definimos $d(f,U)=(\Pi^k_n)^{-1}([(M^k_f,F_f)])\in\Pi_{n+k}(S^n)$ (0.6.6).

Proposición I.1.3

Sean $f_0,f_1:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ dos aplicaciones diferenciables con $0\in(\text{v.r}).(f_0|_U)\cap(\text{v.r.})(f_1|_U)$, y sea $H:(\bar{U}\times I,\partial U\times I)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación diferenciable tal que $H_0=f_0$ y $H_1=f_1$ y $0\in(\text{v.r.})(H|_{U\times I})$. Se verifica que $d(f_0,U)=d(f_1,U)$.

Demostración

Se tiene que $d(f_0, U) = (\Pi^k_n)^{-1}([(f_0^{-1}(0), F_{f_0})])$ y $d(f_1, U) = (\Pi^k_n)^{-1}([(f_1^{-1}(0), F_{f_1})])$ por tanto, basta probar que $(f_0^{-1}(0), F_{f_0})$ y $(f_1^{-1}(0), F_{f_1})$ son homólogas.

Consideremos $\alpha: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ aplicación diferenciable tal que $\alpha|_{[0,1/3)} = 0$, $\alpha|_{(2/3,1]} = 1$ y $\alpha'(t) > 0$ si $t \in (1/3, 2/3)$.

Definimos $G: (\bar{U} \times I, \partial U \times I) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ por $G(x,t) = H(x, \alpha(t))$. Es claro que $G_0 = f_0$, $G_1 = f_1$ y $0 \in (\text{v.r.})(G|_{U \times I})$, y por tanto se deduce que $G^{-1}(0)$ es una subvariedad compacta de $\mathbb{R}^{n+k} \times I$ tal que $G^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{t\}) = f_0^{-1}(0) \times \{t\}$ si $t \in [0, 1/3)$ y $G^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{t\}) = f_1^{-1}(0) \times \{t\}$ si $t \in (2/3, 1]$, además $\partial G^{-1}(0) = (f_0^{-1}(0) \times \{0\}) \cup (f_1^{-1}(0) \times \{1\})$. Sea $F_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ familia linealmente independiente de secciones del fibrado normal de $G^{-1}(0)$ en $\mathbb{R}^{n+k} \times I$ tales que $DG(x,t)(v_j(x,t)) = e_j$ $j = 1, 2, \ldots, n$ y $(x,t) \in G^{-1}(0)$. Como $F_G|_{f_0^{-1}(0) \times \{0\}} = F_{f_0}$ y $F_G|_{f_1^{-1}(0) \times \{1\}} = F_{f_1}$, $(G^{-1}(0), F_G)$ realiza una homología entre $(f_0^{-1}(0), F_{f_0})$ y $(f_1^{-1}(0), F_{f_1})$ y se concluye la demostración.∎

Lema I.1.4

Sean $g_0, g_1: (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ dos aplicaciones diferenciables, homótopas (por una homotopía continua) con 0 valor regular de $g_0|_U$ y de $g_1|_U$. Entonces, existe una homotopía diferenciable H entre g_0 y g_1 tal que $0 \in (\text{v.r.})(H|_{U \times I})$.

Demostración

Por las hipótesis, existe un abierto acotado V de $\mathbb{R}^{n+k}$, conteniendo a $\bar{U}$, y existe una aplicación continua

$H':(\bar{V}\times I,(\bar{V}\setminus U)\times I)\longrightarrow(R^n,R^n\setminus\{0\})$ tal que $H'_0|_{\bar{U}}=g_0$ y $H'_1|_{\bar{U}}=g_1$. Sea P un polinomio tal que $\|P(x,t)-H'(x,t)\|<\varepsilon=\mathrm{dist}(H'((\bar{V}\setminus U)\times I),0)$ para todo $(x,t)\in\bar{V}\times I$, y sea $\alpha:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ una aplicación diferenciable tal que $\alpha|_{[0,1/3)}=0$, $\alpha|_{(2/3,1]}=1$ y $\alpha'(t)>0$ si $t\in(1/3,2/3)$.

Consideremos $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento abierto $\{V\times[0,1/4)\cup V\times(3/4,1],V\times(0,1)\}$ de $V\times[0,1]$ y definamos $H'':V\times I\longrightarrow R^n$ por $H''(x,t)=\lambda_1(x,t)H'(x,\alpha(t))+\lambda_2(x,t)P(x,\alpha(t))$, se tiene que:

a) $H''(x,0)=H'(x,\alpha(0))=g_0(x)$ para todo $x\in\bar{U}$.

b) $H''(x,1)=H'(x,\alpha(1))=g_1(x)$ para todo $x\in\bar{U}$.

c) $H''|_{V\times[0,1/3)\cup V\times(2/3,1]}$ y $H''|_{V\times I\setminus(V\times[0,1/4]\cup V\times[3/4,1])}$ son diferenciables y por tanto, H'' es diferenciable.

d) $H''((V\setminus U)\times I)\subset R^n\setminus\{0\}$. En efecto: si $x\in V\setminus U$ y $t\in[0,1]$, $\|H''(x,t)-H'(x,\alpha(t))\| = \lambda_2(x,t)\|H'(x,\alpha(t))-P(x,\alpha(t))\| < \varepsilon$ y así, $\|H''(x,t)\| \geq \|H'(x,\alpha(t))\|-\|H''(x,t)-H'(x,\alpha(t))\| > \varepsilon-\varepsilon=0$.

Ahora sea W un abierto de R^{n+k} tal que $U\subset\bar{U}\subset W\subset\bar{W}\subset V$, consideremos $\delta_1=\mathrm{dist}(H''((\bar{W}\setminus U)\times I),0)$ y δ_2 tal que $B_{\delta_2}(0)\subset(\mathrm{v.r.})(g_0|_U)\cap(\mathrm{v.r.})(g_1|_U)$. Sean $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ y x_0 un valor regular de H'', contenido en $B_\delta(0)$. Entonces, $G(x,t)=H''(x,t)-x_0$ da una aplicación diferenciable $G:(W\times I,(W\setminus U)\times I)\longrightarrow(R^n,R^n\setminus\{0\})$ tal que $0\in(\mathrm{v.r.})(G)$ y realiza una homotopía entre g_0-x_0 y g_1-x_0. Las aplicaciones $G_i(x,t)=g_i(x,t)-\alpha(t)x_0$ $i=0,1$ son homotopías diferenciables entre g_0 y g_0-x_0 y g_1 y g_1-x_0 respectivamente, además $0\in(\mathrm{v.r.})(G_i)$ $i=0,1$. La aplicación H definida por

$$H(x,t)=\begin{cases} G_0(x,3t) & t\in[0,1/3] \\ G(x,3t-1) & t\in[1/3,2/3] \\ G_1(x,3-3t) & t\in[2/3,1] \end{cases}$$

da la homotopía deseada.∎

Corolario I.1.5

Sean $f_0,f_1:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ dos aplicaciones C^∞ con $0\in(\mathrm{v.r.})(f_0)\cap(\mathrm{v.r.})(f_1)$ y $H:(\bar{U}\times I,\partial U\times I)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicacion continua con $H_0=f_0$ y $H_1=f_1$. Entonces, $d(f_0,U)=d(f_1,U)$.

Demostración

Es una consecuencia inmediata del Lema I.1.4 y la Prop. I.1.3.∎

Definición I.1.6

Sean U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$, $k\geq 0$, $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua y $\varepsilon=\mathrm{dist}(f(\partial U),0)$. Sea $\tilde{f}:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable tal que $0\in(\mathrm{v.r.})(\tilde{f}|_U)$ y $\|f(x)-\tilde{f}(x)\|<\varepsilon$ para todo $x\in\bar{U}$ (entonces $\tilde{f}(x)\neq 0$ para todo $x\in\partial U$). Se define el *grado generalizado* de f por $d(f,U)=d(\tilde{f},U)$.

Consistencia de la definición I.1.6

Si $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ cumplen las condiciones de I.1.6 , la aplicación

$$\begin{aligned} H:(\bar{U}\times I,\partial U\times I)&\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \\ (x,t)&\longmapsto t\tilde{f}(x)+(1-t)\tilde{g}(x) \end{aligned}$$

es una homotopía diferenciable entre $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$. Además, si $x\in\partial U$ se tiene que $\|f(x)-H(x,t)\|\leq t\|f(x)-\tilde{f}(x)\|+(1-t)\|f(x)-\tilde{g}(x)\|<t\varepsilon+(1-t)\varepsilon=\varepsilon$, y así, $\|H(x,t)\|\geq\|f(x,t)\|-\|f(x)-H(x,t)\|>\varepsilon-\varepsilon=0$ ahora aplicando el Corolario

I.1.5 se demuestra que $d(\tilde{f},U)=d(\tilde{g},U)$.■

Corolario I.1.7 (Invariancia por homotopías)

Sean $f,g:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ dos aplicaciones continuas y $H:(\bar{U}\times I,\partial U\times I)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua tal que $H_0=f$ y $H_1=g$. Entonces, $d(f,U)=d(g,U)$.

Demostración

Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ como en la Definición I.1.6. Entonces, $d(f,U)=d(\tilde{f},U)$ y $d(g,U)=d(\tilde{g},U)$. Como f y $\tilde{f}$ son homótopas y g y $\tilde{g}$ también lo son, se deduce que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son aplicaciones homótopas por una homotopía continua. Del Corolario I.1.5 se concluye la demostración.■

I.1.8 Coincidencia con el grado generalizado de Geba, Massabó y Vignoli.

1) Sea $f:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ una aplicación diferenciable tal que $p\in(v.r.)(f)$, $f^{-1}(p)\subset U'\subset\bar{U}'\subset S^{n+k}\setminus\{q'\}$, donde U' es un subconjunto abierto de S^{n+k}, y $f|_{\bar{U}'}:(\bar{U}',\partial U')\longrightarrow(S^n\setminus\{q\},S^n\setminus\{p,q\})$. En estas condiciones, $D(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))=[f]\in\Pi_{n+k}(S^n)$ como consecuencia de la propia definición del grado generalizado de Geba, Massabó y Vignoli dado al comienzo del capítulo.

Por otra parte $d(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))=[f]\in\Pi_{n+k}(S^n)$ según se desprende de las definiciones I.1.1, I.1.2 y 0.6.4, tomando como V en la Definición 0.6.4, $V=\{\theta^p_{c'}(e_1),\dots,\theta^p_{c'}(e_n)\}$ donde $c'=(S^n\setminus\{q\},\varphi_n^{-1},\mathbb{R}^n)$. Por tanto se tiene que $d(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))=D(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))$.

2) Consideremos ahora $f:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ una aplicación continua

tal que $f^{-1}(p)\subset U'\subset \bar{U}'\subset S^{n+k}\setminus\{q'\}$, con U' subconjunto abierto de S^{n+k}, y $f|_{\bar{U}'}:(\bar{U}',\partial U')\longrightarrow(S^n\setminus\{q\},S^n\setminus\{p,q\})$. Sea V un entorno tubular de S^n en R^{n+1}, con $\bar{V}$ compacto, y sea $r:\bar{V}\longrightarrow S^n$ la retracción diferenciable canónica. Como r es uniformemente continua, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$, con $0<\delta<\varepsilon$, tal que para todo $x,y\in\bar{V}$ con $\|x-y\|<\delta$ se verifica que $\|r(x)-r(y)\|<\varepsilon$.

Sean $\varepsilon=\min\{dist(f(\bar{U}'),q),dist(f(S^{n+k}\setminus U'),p),dist(S^n,R^{n+1}\setminus V)\}$ y $g:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ una aplicación diferenciable tal que $\|f(x)-g(x)\|<\delta$ para todo $x\in S^{n+k}$ y $p\in(v.r.)(g)$. Como $\|tf(x)+(1-t)g(x)-f(x)\|<\delta<\varepsilon$, $tf(x)+(1-t)g(x)\in V$ para todo $x\in S^{n+k}$ y $t\in I$. Así, se tiene la aplicación continua $H:S^{n+k}\times I\longrightarrow S^n$ definida por $H(x,t)=r(tf(x)+(1-t)g(x))$. Además, si $x\in\bar{U}'$ y $t\in I$, se verifica que $\|q-r(tf(x)+(1-t)g(x))\|\geq\|q-f(x)\|-\|r(tf(x)+(1-t)g(x))-r(f(x))\|$. Como $\|tf(x)+(1-t)g(x)-f(x)\|<\delta$ se tiene que $\|r(tf(x)+(1-t)g(x))-r(f(x))\|<\varepsilon$ y así, $\|q-H(x,t)\|=\|q-r(tf(x)+(1-t)g(x))\|>\varepsilon-\varepsilon=0$. Por tanto $H(\bar{U}'\times I)\subset S^n\setminus\{q\}$. De la misma manera se ve que $H((S^{n+k}\setminus U')\times I)\subset S^n\setminus\{p\}$. Entonces, $\varphi_n^{-1}\circ H\circ(\varphi_{n+k}\times Id):(\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')\times I,\partial\varphi_{n+k}^{-1}(U')\times I)\longrightarrow(R^n,R^n\setminus\{0\})$ y por el .Corolario I.1.7 $d(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))$ coincide con $d(\varphi_n^{-1}\circ g\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))$. Por otro lado, por la propiedad de invariancia por homotopías para el grado de Geba, Massabó y Vignoli, se tiene que $D(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))$ también coincide con $D(\varphi_n^{-1}\circ g\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))$. Según se ha visto en el punto anterior $d(\varphi_n^{-1}\circ g\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U')) = D(\varphi_n^{-1}\circ g\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))$, en consecuencia

$\mathrm{d}(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U')) = D(\varphi_n^{-1}\circ f\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\bar{U}')},\varphi_{n+k}^{-1}(U'))$, para toda aplicación continua $f:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ tal que $f^{-1}(p)\subset U'\subset\bar{U}'\subset S^{n+k}\setminus\{q'\}$ y $f|_{\bar{U}'}:(\bar{U}',\partial U')\longrightarrow(S^n\setminus\{q\},S^n\setminus\{p,q\})$.

3) Finalmente, sea $h:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua, donde U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$. Consideremos $\tilde{h}:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ una extensión continua de $\varphi_n\circ h\circ\varphi_{n+k}^{-1}|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})}$ tal que $\tilde{h}(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(\bar{U}))\subset S^n\setminus\{p\}$. Entonces,

$D(h,U)=[\tilde{h}]=D(\varphi_n^{-1}\circ\tilde{h}\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\varphi_{n+k}(\bar{U}))},\varphi_{n+k}^{-1}(\varphi_{n+k}(U)))=$

$=\mathrm{d}(\varphi_n^{-1}\circ\tilde{h}\circ\varphi_{n+k}|_{\varphi_{n+k}^{-1}(\varphi_{n+k}(\bar{U}))},\varphi_{n+k}^{-1}(\varphi_{n+k}(U)))=\mathrm{d}(h,U)$, que es lo que se pretendía demostrar.■

Observemos que por esta coincidencia, $\mathrm{d}(f,U)$ verifica las mismas propiedades que $D(f,U)$ señaladas al comienzo del capítulo, no obstante éstas son de fácil demostración por la nueva definición. Veamos por ejemplo la demostración de la propiedad de solución:

Sea $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua tal que $\mathrm{d}(f,U)\neq0$. Si $f(\bar{U})\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, se tendría que $\varepsilon=\mathrm{dist}(f(\bar{U}),0)>0$. Tomemos $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable tal que $0\in(\mathrm{v.r.})(g|_U)$ y $\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon$ para cada $x\in\bar{U}$. Entonces, $g(\bar{U})\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y $\mathrm{d}(f,U)=\mathrm{d}(g,U)$ como $g^{-1}(0)=\emptyset$, se tiene que $\mathrm{d}(g,U)=0$ en contradicción con que $\mathrm{d}(f,U)=\mathrm{d}(g,U)\neq0$. Así $f(\bar{U})$ no está contenido en $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y por tanto existe $x\in U$ tal que $f(x)=0$.■

De manera similar se podrían demostrar, con estas técnicas las restantes propiedades.

Mención especial merece la propiedad aditiva del grado generalizado que pasamos a discutir. Esta propiedad se mejora sensiblemente con la nueva descripción del grado generalizado, y daremos ejemplos en los que no se verifica.

I.1.9.

Vamos a construir explícitamente un abierto acotado U de $\mathbb{R}^3$ y una aplicación continua $f\colon(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ tal que $d(f,U)\in\Pi_3(S^2)$ es exactamente la clase de Hopf. Este tipo de construcción será utilizada posteriormente en la discusión de las propiedades aditiva y de invariancia por difeomorfismos.

Sea $\bar{U}$ el toro macizo en $\mathbb{R}^3$, de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1=(4+2y_1)z_1 \\ x_2=(4+2y_1)z_2 \\ x_3=2y_2 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{matrix} y_1^2+y_2^2\le 1 \\ z_1^2+z_2^2=1 \end{matrix}$$

Sea M^1 la subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $\begin{cases} x_3=0 \\ x_1^2+x_2^2=4^2 \end{cases}$ y V un entorno tubular de M^1 tal que $\bar{U}\subset V$.

Para cada $x=(x_1,x_2,x_3)\in M^1$ sea $u_1(x)=x/4$ y $u_2(x)=(0,0,1)$. Es claro que $F=\{u_1,u_2\}$ es una referencia normal para M^1 y $[(M^1,F)]\in\mathfrak{J}_c^1(\mathbb{R}^3)$. En virtud del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2(S^1) & \xrightarrow{\ \Sigma\ } & \Pi_3(S^2) \\ {\scriptstyle \Pi_1^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_2^1} \\ \mathfrak{J}_c^1(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\ E\ } & \mathfrak{J}_c^1(\mathbb{R}^3) \end{array} \qquad (0.6.12)$$

se tiene que $[(M^1,F)]=[(M^1,Eu_1)]=E([(M^1,u_1)])$. Como $\Pi_2(S^1)=0$, se concluye que $[(M^1,F)]=0$.

Por otra parte, utilizando 0.6.25, si tomamos $v_1^1(x)=\frac{x_1}{4}u_1(x)+\frac{x_2}{4}u_2(x)$, $\quad v_2^1(x)=-\frac{x_2}{4}u_1(x)+\frac{x_1}{4}u_2(x)$ y

$V_1=\{v_1^1, v_2^1\}$, se tiene que $[(M^1, V_1)]\in\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^3)$ y $(\Pi_2^1)^{-1}([(M^1, V_1)])$ es la clase de Hopf de $\Pi_3(S^2)$. Vamos a hallar una aplicación diferenciable $f:(\bar{U}, \partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ tal que $0\in(\mathrm{v.r.})(f|_U)$ y $[(f^{-1}(0), F_f)]=[(M^1, V_1)]$ y por tanto, $d(f, U)\in\Pi_3(S^2)$ es la clase de Hopf.

Como V es un entorno tubular de M^1, con $\bar{U}\subset V$, si $r:\bar{U}\longrightarrow M^1$ es la restricción de la retracción diferenciable usual, se tiene que para cada $x\in\bar{U}$ existen $\lambda_1(x)\in\mathbb{R}$ y $\lambda_2(x)\in\mathbb{R}$, únicos, tales que $x=r(x)+\lambda_1(x)v_1^1(r(x))+\lambda_2(x)v_2^1(r(x))$. Así, tenemos la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} f:(\bar{U}, \partial U) &\longrightarrow(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\setminus\{0\}) \\ x &\longmapsto(\lambda_1(x), \lambda_2(x)) \end{aligned}$$

la cual cumple que 0 es un valor regular de $f|_U$ y $(f^{-1}(0), F_f)=(M^1, V_1)$. Después de realizar cálculos, queda que $f(x_1, x_2, x_3)=$

$$=\left(\frac{x_1(x_1^2+x_2^2)+\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(x_2x_3-4x_1)}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_2(x_1^2+x_2^2)+\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(x_1x_3-4x_2)}{x_1^2+x_2^2}\right).$$

Para cada $(x_1, x_2, 0)\in f^{-1}(0)=M^1$, se obtiene que la diferencial de f, $Df(x_1, x_2, 0)=1/16\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & 4x_2 \\ -x_1x_2 & -x_2^2 & 4x_1 \end{pmatrix}$ lo cual permite comprobar fácilmente que $Df(x_1, x_2, 0)(v_1^1(x_1, x_2, 0))=e_1$ y $Df(x_1, x_2, 0)(v_2^1(x_1, x_2, 0))=e_2$. ∎

Invariancia por difeomorfismos

Es bien conocido que si U_1, U_2 son subconjuntos abiertos, acotados y conexos de $\mathbb{R}^n$, $\varphi:\bar{U}_1\longrightarrow\bar{U}_2$ es un difeomorfismo y $f:(\bar{U}_2, \partial U_2)\longrightarrow(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ es una aplicación continua, se verifica que $d(f, U_2)=\pm d(f\circ\varphi, U_1)$, donde d denota el grado de Brouwer, y el signo + o - depende de que φ conserve o invierta la orientación respectivamente. Sin embargo, esta propiedad no se verifica para el grado generalizado, si no se imponen otras condiciones, como lo demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo I.1.10

Sea $S^1=\{x=(x_1,x_2,0)\in\mathbb{R}^3: x_1^2+x_2^2=1\}$. Si $x=(x_1,x_2,0)\in S^1$ definimos, de manera análoga que en I.1.9, $u_1(x)=x$, $u_2(x)=(0,0,1)$, $F=\{u_1,u_2\}$ y $v_1(x)=x_1u_1(x)+x_2u_2(x)$, $v_2(x)=-x_2u_1(x)+x_1u_2(x)$, $F^1=\{v_1,v_2\}$. Entonces, $[(S^1,F)]=0\in\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^3)$ y $[(S^1,F^1)]\in\mathfrak{F}_c^1(\mathbb{R}^3)$ es la clase de Hopf.

Sean $\upsilon(S^1)$ el fibrado normal (trivializable) de S^1 como subvariedad de $S^1\times\mathbb{R}^2$, D entorno abierto de la sección cero en $\upsilon(S^1)$ tal que $exp: \begin{array}{l} D\longrightarrow V \\ (x,v)\longmapsto x+v \end{array}$ es un difeomorfismo, donde V es un entorno abierto de S^1 en $\mathbb{R}^3$ y $r: V\longrightarrow S^1$ la retracción diferenciable definida por este entorno tubular. Sea $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño,

$$\begin{array}{l} \varphi_1: \bar{B}_\varepsilon(0)\times S^1\longrightarrow \upsilon(S^1) \\ ((\lambda_1,\lambda_2),x)\longmapsto (x,\lambda_1u_1(x)+\lambda_2u_2(x)) \end{array} \quad \text{y}$$

$$\begin{array}{l} \varphi_2: \bar{B}_\varepsilon(0)\times S^1\longrightarrow \upsilon(S^1) \\ ((\mu_1,\mu_2),x)\longmapsto (x,\mu_1v_1(x)+\mu_2v_2(x)) \end{array}$$

donde $\bar{B}_\varepsilon(0)$ es la bola cerrada de radio ε y centro 0 en $\mathbb{R}^2$. Es claro que φ_1 y φ_2 son difeomorfismos sobre su imagen. Sean $U = (exp\circ\varphi_1)(B_\varepsilon(0)\times S^1) = (exp\circ\varphi_2)(B_\varepsilon(0)\times S^1)$ y $\bar{U} = (exp\circ\varphi_1)(\bar{B}_\varepsilon(0)\times S^1) = (exp\circ\varphi_2)(\bar{B}_\varepsilon(0)\times S^1)$. Si $x\in\bar{U}$, existe una descomposición única $x=r(x)+\lambda_1(x)u_1(r(x))+\lambda_2(x)u_2(r(x))$ y $x=r(x)+\mu_1(x)v_1(r(x))+\mu_2(x)v_2(r(x))$.

Sean $f: \begin{array}{l} (\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus\{0\}) \\ x\longmapsto(\lambda_1(x),\lambda_2(x)) \end{array}$ y $g: \begin{array}{l} (\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus\{0\}) \\ x\longmapsto(\mu_1(x),\mu_2(x)) \end{array}$.

Entonces, $d(f,U)=0$ y $d(g,U)$ es la clase de Hopf de $\Pi_3(S^2)$. Veamos que existe un difeomorfismo $\varphi:\bar{U}\longrightarrow\bar{U}$ tal que $f=g\circ\varphi$. Para todo $((\lambda_1,\lambda_2),x)\in\bar{B}_\varepsilon(0)\times S^1$ se tiene que $(f\circ exp\circ\varphi_1)((\lambda_1,\lambda_2),x)=(\lambda_1,\lambda_2)$ y $(g\circ exp\circ\varphi_2)((\mu_1,\mu_2),x)=(\mu_1,\mu_2)$, y por tanto, $f\circ exp\circ\varphi_1=g\circ exp\circ\varphi_2$. Así, $f=g\circ exp\circ\varphi_2\circ(exp\circ\varphi_1)^{-1}$. Definiendo $\varphi:\bar{U}\longrightarrow\bar{U}$ por $\varphi(x)=exp\circ\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}\circ exp^{-1}(x)$ se tiene un difeomorfismo tal que $f=g\circ\varphi$. ■

Observemos que este ejemplo se puede extender a dimensiones superiores, siempre que en $\mathfrak{F}^k_c(\mathbb{R}^{n+k})$ existan $[(M^k,F)]$ y $[(M^k,F')]$ con $[(M^k,F)]\neq\pm[(M^k,F')]$.

Proposición I.1.11

Sean U_1,U_2 dos subconjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^{n+k}$, $f:(\bar{U}_2,\partial U_2)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua y $\varphi:\bar{U}_1\longrightarrow\bar{U}_2$ un homeomorfismo. Si la aplicación $\varphi_{n+k}\circ\varphi\circ\varphi_{n+k}^{-1}:\varphi_{n+k}(\bar{U}_1)\longrightarrow\varphi_{n+k}(\bar{U}_2)$ se puede extender a un homeomorfismo $h:S^{n+k}\longrightarrow S^{n+k}$, se verifica que $d(f,U_2)=\pm d(f\circ\varphi,U_1)$, donde se toma el signo + si $d(h)=1$ y el signo - si $d(h)=-1$.

Demostración

Se considera la aplicación continua

$\tilde{f}:\varphi_n\circ f\circ\varphi_{n+k}^{-1}:(\varphi_{n+k}(\bar{U}_2),\partial\varphi_{n+k}(U_2))\longrightarrow(S^n\setminus\{q\},S^n\setminus\{p,q\})$. Si extendemos $\tilde{f}$ a una aplicación continua $\bar{f}:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ tal que $\bar{f}(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U_2))\subset S^n\setminus\{p\}$, se tiene que $d(f,U_2)=[\bar{f}]\in\Pi_{n+k}(S^n)$.

Vamos a probar que $d(f\circ\varphi,U_1)=[\bar{f}\circ h]=\pm[\bar{f}]\in\Pi_{n+k}(S^n)$.

Consideremos la aplicación continua

$\varphi_n\circ f\circ\varphi\circ\varphi_{n+k}^{-1}:(\varphi_{n+k}(\bar{U}_1),\partial\varphi_{n+k}(U_1))\longrightarrow(S^n\setminus\{q\},S^n\setminus\{p,q\})$. Entonces, la aplicación continua $\bar{f}\circ h:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ cumple que

$\bar{f}\circ h|_{\varphi_{n+k}(\bar{U}_1)}=\varphi_n\circ f\circ\varphi\circ\varphi_{n+k}^{-1}|_{\varphi_{n+k}(\bar{U}_1)}$ y

$\bar{f}\circ h|_{S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U_1)}(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U_1)) = \bar{f}(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(U_2))\subset S^n\setminus\{p\}$. Por tanto, $d(f\circ\varphi,U_1)=[\bar{f}\circ h]$. ■

DISCUSION DE LA PROPIEDAD ADITIVA.

Según hemos dicho anteriormente, una ventaja importante de nuestra descrpción del grado generalizado es el poder usar técnicas diferenciales para la obtención de propiedades del mismo. Es precisamente en el estudio de la propiedad aditiva donde se puede constatar mas claramente ésta ventaja.

Proposición I.1.12

Sean $\Sigma:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ el homomorfismo suspensión, U un abierto acotado de R^{n+k}, $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(R^n,R^n\setminus\{0\})$ una aplicación continua, U_1 y U_2 dos subconjuntos abiertos de R^{n+k}, contenidos en U, tales que $U_1\cap U_2=\emptyset$ y $f(x)\neq 0$ para todo $x\in U\setminus(U_1\cup U_2)$. Entonces, si Σ es inyectiva se tiene que $d(f,U) = d(f|_{\bar{U}_1},U_1) + d(f|_{\bar{U}_2},U_2)$.

Demostración.

Por la propiedad de escisión, basta ver que $d(f|_{\overline{U_1\cup U_2}},U_1\cup U_2) = d(f|_{\bar{U}_1},U_1) + d(f|_{\bar{U}_2},U_2)$, y por la misma propiedad podemos suponer que $\bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\emptyset$.

Sean $\varepsilon_1=\text{dist}(f(\partial U_1),0)$, $\varepsilon_2=\text{dist}(f(\partial U_2),0)$ y $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Existe $g:\overline{U_1\cup U_2}\longrightarrow R^n$, aplicación diferenciable tal que 0 es un valor regular de $g|_{U_1\cup U_2}$ y $\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon$ para cada $x\in\overline{U_1\cup U_2}$. Entonces, $d(f|_{\bar{U}_1},U_1) = d(g|_{\bar{U}_1},U_1)$, $d(f|_{\bar{U}_2},U_2) = d(g|_{\bar{U}_2},U_2)$ y $d(f|_{\overline{U_1\cup U_2}},U_1\cup U_2) = d(g,U_1\cup U_2)$. Es suficiente ver que $d(g,U_1\cup U_2) = d(g|_{\bar{U}_1},U_1) + d(g|_{\bar{U}_2},U_2)$.

Se tiene que, $d(g|_{\bar{U}_1}, U_1) = (\Pi_n^k)^{-1}([(g^{-1}(0)\cap U_1, F_g|_{g^{-1}(0)\cap U_1})])$, $d(g|_{\bar{U}_2}, U_2) = (\Pi_n^k)^{-1}([(g^{-1}(0)\cap U_2, F_g|_{g^{-1}(0)\cap U_2})])$ y $d(g, U_1\cup U_2) = (\Pi_n^k)^{-1}([(M_1^k\cup M_2^k, F_g)])$, donde hemos designado por M_1^k y M_2^k a $g^{-1}(0)\cap U_1$ y $g^{-1}(0)\cap U_2$ respectivamente.

Por la Prop.0.6.12 se tiene la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{n+k}(S^n) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi_n^k"'] & \Pi_{n+k+1}(S^{n+1}) \arrow[d, "\Pi_{n+1}^k"] \\
\mathfrak{J}_c^k(\mathbb{R}^{n+k}) \arrow[r, "E"] & \mathfrak{J}_c^k(\mathbb{R}^{n+k+1})
\end{tikzcd}$$

y por tanto E es inyectiva.

Hemos de ver que $[(M_1^k\cup M_2^k, F_g)] = [(M_1^k, F_g^1)] + [(M_2^k, F_g^2)]$, donde $F_g^1 = F_g|_{M_1^k}$ y $F_g^2 = F_g|_{M_2^k}$, para lo cual basta con probar que $E([(M_1^k\cup M_2^k, F_g)]) = E([(M_1^k, F_g^1)]) + E([(M_2^k, F_g^2)])$. Si $F_g = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $EF_g = \{u_1, \ldots, u_n, e_{n+k+1}\}$, se tiene que $E([(M_1^k, F_g^1)]) = [(M_1^k, EF_g^1)]$, $E([(M_2^k, F_g^2)]) = [(M_2^k, EF_g^2)]$ y $E([(M_1^k\cup M_2^k, F_g)]) = [(M_1^k\cup M_2^k, EF_g)]$.

Sea $t\in I$ y $e_t : M_1^k\cup M_2^k \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ definida por

$$e_t(x) = \begin{cases} (x, 0) & \text{si } x\in M_1^k \\ (x, t) & \text{si } x\in M_2^k \end{cases}.$$

Sea $\sigma : I \longrightarrow I$ una aplicación diferenciable tal que $\sigma|_{[0,1/3)} = 0$, $\sigma|_{(2/3,1]} = 1$ y $\sigma'(t) > 0$ para $t\in(1/3, 2/3)$. Es claro que

$$\begin{aligned} e : (M_1^k\cup M_2^k)\times I &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1} \\ (x, t) &\longmapsto e_{\sigma(t)}(x) \end{aligned}$$ es una isotopía diferenciable.

Por el Lema 0.6.8 se verifica que

$$[(M_1^k\cup M_2^k, EF_g)] = [(e_1(M_1^k)\cup e_1(M_2^k), \tilde{e}\,(EF_g)|_{(e_1(M_1^k)\cup e_1(M_2^k))})] =$$

$$= [(M_1^k\cup e_1(M_2^k), \tilde{e}\,(EF_g)|_{M_1^k\cup e_1(M_2^k)})],$$

$$[(M_1^k, EF_g^1)] = [((e_1|_{M_1^k})(M_1^k), (\tilde{e}|_{M_1^k\times I})(EF_g^1)|_{e_1(M_1^k)})] = [(M_1^k, EF_g^1)]$$

y $[(M_2^k, EF_g^2)] = [(e_1|_{M_2^k})(M_2^k), (\tilde{e}|_{M_2^k \times I})(EF_g^2)|_{e_1(M_2^k)}]$.

Como M_1^k y $e_1(M_2^k)$ están separados por un hiperplano se tiene

$[(M_1^k \cup M_2^k, EF_g)] = [(M_1^k \cup e_1(M_2^k), \tilde{e}\ (EF_g)|_{M_1^k \cup e_1(M_2^k)})] =$

$= [(M_1^k, \tilde{e}(EF_g)|_{M_1^k})] + [(e_1(M_2^k), \tilde{e}(EF_g)|_{e_1(M_2^k)})] =$

$= [(M_1^k, EF_g^1)] + [(M_2^k, EF_g^2)]$ como queríamos demostrar.∎

Como consecuencia, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario I.1.13

Sean U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$, $f\colon (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ una aplicación continua y U_1 y U_2 subconjuntos abiertos y disjuntos de U tales que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in U \setminus (U_1 \cup U_2)$. Entonces se tiene:

a) Si $n \geq k+2$ $d(f, U) = d(f|_{\bar{U}_1}, U_1) + d(f|_{\bar{U}_2}, U_2)$.

b) Si $k=2$ y $n \geq 2$ $d(f, U) = d(f|_{\bar{U}_1}, U_1) + d(f|_{\bar{U}_2}, U_2)$.

Demostración.

a) Basta tener en cuenta que si $n \geq k+2$, $\Sigma\colon \Pi_{n+k}(S^n) \longrightarrow \Pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ es un isomorfismo.

b) Es consecuencia de que si $k=2$, $\Sigma\colon \Pi_{n+2}(S^n) \longrightarrow \Pi_{n+3}(S^{n+1})$ es un isomorfismo. (0.6.28).∎

Por tanto, el caso $n \geq k+4$ en el que los autores del artículo [15] demostraban la propiedad aditiva, es un caso particular de la Prop I.1.12 y en definitiva se cumple una importante relación entre la suspensión y la verificación de dicha propiedad. Por otra parte y también en [15] se señala que es un problema abierto si la aditividad se cumplía en general. El siguiente ejemplo da una contestación negativa a este problema.

Ejemplo I.1.14

Sean $S^r \subset R^{2r+1}$ (de la manera habitual $S^r \subset R^{r+1} \times \{0,0,\dots,0\}$), $x^\bullet \in S^r$ y $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ una base ortonormal del espacio normal a S^r en $x^\bullet$.

Sea $j_\varepsilon : S^r \longrightarrow R^{2r+1}$ definida por $j_\varepsilon(y) = x^\bullet + \varepsilon(y_0 v_0 + \cdots + y_r v_r)$ donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño ($\varepsilon \leq 1$), $L(S^r, j_\varepsilon(S^r)) = 1$ donde L denota el número de enlace (0.6.15).

En estas condiciones, sean

$S_1^r = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{2r+1}) \in R^{2r+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{r+1}^2 = 1, \quad x_{r+2} = \cdots = x_{2r+1} = 0\}$ y $v_0 = e_1$, $v_1 = e_{r+2}$, ..., $v_r = e_{2r+1}$. Entonces, $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ forman una base ortonormal del espacio normal a S_1^r en $x = (1, 0, \dots, 0)$ en R^{2r+1}.

Sean $j_1 : S_1^r \longrightarrow R^{2r+1}$ definida por

$$j_1(y) = (1, 0, \dots, 0) + (y_0 v_0 + \cdots + y_r v_r) \text{ y}$$

$j_1(S_1^r) = S_2^r = \{x \in R^{2r+1} : (x_1 - 1)^2 + x_{r+2}^2 + \cdots + x_{2r+1}^2 = 1, \quad x_j = 0 \quad j = 2 \cdots r+1\}$.

Así, $L(S_1^r, S_2^r) = 1$.

Sean ahora $F_1 = \{u_1, \dots, u_{r+1}\}$ y $F_2 = \{w_1, \dots, w_{r+1}\}$ referencias normales de S_1^r y S_2^r respectivamente, definidas por $u_1(x) = x$, $u_2(x) = e_{r+2}, \dots, u_{r+1}(x) = e_{2r+1}$ y $w_1(x) = (x - (1, 0, \dots, 0))$, $w_2(x) = e_2$, ..., $w_{r+1}(x) = e_{r+1}$.

Sean U_1 y U_2 entornos tubulares de S_1^r y S_2^r tales que $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$ y $f : \overline{(U_1 \cup U_2)} \longrightarrow R^{r+1}$ tal que $d(f, U_1 \cup U_2) = (\Pi_{r+1}^r)^{-1}([(S_1^r \cup S_2^r, F)])$

siendo $F|_{S_1^r}=F_1$ y $F|_{S_2^r}=F_2$ (f se puede construir como en I.1.9).

Vamos a demostrar que si r es un número impar $d(f,U_1\cup U_2)=(\Pi_{r+1}^r)^{-1}([(S_1^r\cup S_2^r,F)])$ y $d(f|_{\bar{U}_1},U_1)+d(f|_{\bar{U}_2},U_2) = (\Pi_{r+1}^r)^{-1}([(S_1^r,F_1)])+(\Pi_{r+1}^r)^{-1}([(S_2^r,F_2)])$ no coinciden. Para lo cual bastará probar que $[(S_1^r\cup S_2^r,F)]\neq[(S_1^r,F_1)]+[(S_2^r,F_2)]$.

Como por 0.6.19 se tiene definido un homomorfismo $\gamma:\Pi_{2r+1}(S^{r+1})\longrightarrow\mathbb{Z}$, que es el invariante de Hopf, todo se reduce a ver que $\gamma([(S_1^r\cup S_2^r,F)])\neq\gamma([(S_1^r,F_1)])+\gamma([(S_2^r,F_2)])$.

Para calcular cada uno de estos números hacemos uso del Teorema 0.6.20. Tomamos $c=(0,\varepsilon,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^{r+1}$ con ε suficientemente pequeño. Entonces, $\gamma([(S_1^r,F_1)])=L(S_1^r,C(S_1^r))$ y $\gamma([(S_2^r,F_2)])=L(S_2^r,C(S_2^r))$, como S_1^r y $C(S_1^r)$ están separados por un hiperplano se tiene que $L(S_1^r,C(S_1^r))=0$ y como S_2^r y $C(S_2^r)$ también están separados por un hiperplano $L(S_2^r,C(S_2^r))=0$ (también se puede probar que $\gamma([(S_1^r,F_1)])=\gamma([(S_2^r,F_2)])=0$ dándonos cuenta de que tanto $[(S_1^r,F_1)]$ como $[(S_2^r,F_2)]$ son suspensiones de elementos de $\mathfrak{F}_c^r(\mathbb{R}^{2r})$ (0.6.22)). Así, lo único que queda por probar es que $\gamma([(S_1^r\cup S_2^r,F)])\neq 0$. Pero $\gamma([(S_1^r\cup S_2^r,F)]) = L(S_1^r\cup S_2^r,C(S_1^r\cup S_2^r)) =$ $= L(S_1^r,C(S_1^r)) + L(S_1^r,C(S_2^r)) + L(S_2^r,C(S_1^r)) + L(S_2^r,C(S_2^r))$. Como antes, $L(S_1^r,C(S_1^r)) = L(S_2^r,C(S_2^r)) = 0$ y por el Lema 0.6.16 $L(S_1^r\cup S_2^r,C(S_1^r\cup S_2^r)) = L(S_1^r,C(S_2^r)) + (-1)^{(r+1)(r+1)}L(C(S_1^r),S_2^r) =$ $= L(S_1^r,C(S_2^r)) + L(C(S_1^r),S_2^r) = L(S_1^r,S_2^r) + L(S_1^r,S_2^r) = 2$, dado que r es impar, ε es suficientemente pequeño y $c=(0,\varepsilon,0,\dots,0)$.∎

Este ejemplo prueba además que la acotación $n \geq k+2$ del Corolario I.1.13 para que se cumpla la propiedad aditiva del grado generalizado, en general, es la mejor posible.

I.2 GRADO GENERALIZADO DE APLICACIONES PROPIAS

Como en el caso de la teoría del grado clásico, se puede definir el grado generalizado para aplicaciones propias de la siguiente forma:

Sean $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una aplicación propia tal que $f(\partial U)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Como f es propia, se tiene que $f^{-1}(0)$ es un compacto de $\mathbb{R}^{n+k}$ contenido en U. Así, existe un subconjunto abierto y acotado, V, de $\mathbb{R}^{n+k}$ tal que $f^{-1}(0)\subset V\subset\bar{V}\subset U$. Supongamos que V_1 y V_2 son subconjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^{n+k}$ tales que $f^{-1}(0)\subset V_1\subset\bar{V}_1\subset U$ y $f^{-1}(0)\subset V_2\subset\bar{V}_2\subset U$. Entonces, por la propiedad de escisión del grado generalizado se tiene que $d(f|_{\bar{V}_1},V_1)=d(f|_{\overline{V_1\cap V_2}},V_1\cap V_2)=d(f|_{\bar{V}_2},V_2)$.

El razonamiento anterior prueba la consistencia de la siguiente definición.

Definición I.2.1

Sean $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, U un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $f:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación propia. Se define $d(f,U)\in\Pi_{n+k}(S^n)$ por $d(f|_{\bar{V}},V)$, donde V es un abierto acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$ tal que $f^{-1}(0)\subset V\subset\bar{V}\subset U$.

Observamos que si U es un abierto acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$, toda aplicacion continua de $\bar{U}$ en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación propia. Por tanto, la definición anterior abarca la definición del grado generalizado dado en el párrafo 1 de este capítulo.

Se demuestra facilmente que el grado generalizado de aplicaciones propias tiene las siguientes propiedades:

1) Invariancia por homotopías

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$, $f_0, f_1: (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ dos aplicaciones propias tales que existe $H: (\bar{U} \times I, \partial U \times I) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ aplicación propia con $H_0 = f_0$ y $H_1 = f_1$. Entonces, $d(f_0, U) = d(f_1, U)$.

2) Escisión

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$, $f: (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ una aplicación propia y U_1 un subconjunto abierto de U tal que f no se anula en $U \setminus U_1$. Entonces, $d(f|_{\bar{U}_1}, U_1) = d(f, U)$.

3) Solución

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$, $f: (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ una aplicación propia tal que $d(f, U) \neq 0$. Entonces, existe $x \in U$ tal que $f(x) = 0$.

4) Aditividad

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$, $f: (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ una aplicación propia y U_1, U_2 dos abiertos contenidos en U tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U \setminus (U_1 \cup U_2)$. En estas condiciones, se verifica que $d(f, U) = d(f|_{\bar{U}_1}, U_1) + d(f|_{\bar{U}_2}, U_2)$ si $k \leq n-2, k=0$ ó $k=2$ y $n \geq 2$.

5) Normalización

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ con $0 \in U$ y $\mathrm{Id}: (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ la identidad, se tiene que $d(\mathrm{Id}, U) = [\mathrm{Id}_{S^n}] \in \Pi_n(S^n)$.

6) Invariancia por homeomorfismos

Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^{n+k}$, $\varphi: \bar{U}_1 \longrightarrow \bar{U}_2$ un homeomorfismo y $f: (\bar{U}_2, \partial U_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ una aplicación propia. Si $\varphi_{n+k} \circ \varphi \circ \varphi_{n+k}^{-1}: \varphi_{n+k}(\bar{U}_1) \longrightarrow \varphi_{n+k}(\bar{U}_2)$ se puede extender a un homeomorfismo $h: S^{n+k} \longrightarrow S^{n+k}$, se verifica que $d(f,U_2)=\pm d(f\circ\varphi,U_1)$ donde se toma el signo + si $d(h)=1$ y el signo - si $d(h)=-1$.

De las definiciones I.1.2 y I.2.1, se deduce que si U es un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $f:(\bar{U},\partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ es una aplicación propia diferenciable y $0\in(\text{v.r.})(f|_U)$, se tiene que $d(f,U) = (\Pi_n^k)^{-1}([(M_f^k,F_f)]) \in \Pi_{n+k}(S^n)$, donde $M_f^k = f^{-1}(0)$ y $F=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ con $Df(x)(u_j(x))=e_j$ para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ y todo $x\in f^{-1}(0)$.

Se observa que se puede construir una teoría del grado generalizado para aplicaciones propias, partiendo de la fórmula anterior para aplicaciones propias diferenciables como definición, y seguir un proceso análogo al desarrollado en el párrafo 1.

CAPITULO II

GRADO GENERALIZADO EN ESPACIOS VECTORIALES REALES NORMADOS.

En este capítulo, vamos a presentar una teoría del grado para aplicaciones continuas $f:(\bar{D},\partial D)\longrightarrow(E,E\setminus\{0\})$, donde E es un espacio vectorial real normado, D es un abierto de $R^k xE$ tal que $p_1(D)$ es acotado en R^k y f es una perturbación compacta de la proyección sobre el segundo factor $p_2:R^k xE\longrightarrow E$.

El proceso a seguir, es paralelo al desarrollado en la teoría de Leray-Schauder [5], coincidiendo con ésta para el caso $k=0$.

Si la propiedad aditiva no se verificaba en toda su generalidad para el grado generalizado en espacios euclídeos, como se vió en el primer capítulo, aquí se cumplirá sin restricción alguna y las propiedades son análogas a las del grado de Leray-Schauder. Posteriormente extenderemos la definición del grado a perturbaciones γ-condensantes. Aplicaciones de esta teoría del grado generalizado se estudiarán en el capítulo IV.

II.1 GRADO GENERALIZADO PARA PERTURBACIONES COMPACTAS DE LA PROYECCION $p_2: \mathbb{R}^k \times E \longrightarrow E$.

Comenzamos dando las definiciones y propiedades básicas necesarias para nuestros objetivos.

Definición II.1.1

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios vectoriales reales normados, Ω un subconjunto de E y $f: \Omega \longrightarrow F$ una aplicación. Diremos que f es *compacta* si es continua y $\overline{f(\Omega)}$ es un compacto de F. Diremos que f es *finito-dimensional* si $f(\Omega) \subset F_n \subset F$, donde F_n es un subespacio vectorial de F de dimensión n, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por $\mathcal{K}(\Omega, F) = \{f: \Omega \longrightarrow F:\ f \text{ es compacta}\}$ y por $\mathcal{F}(\Omega, F) = \{f: \Omega \longrightarrow F:\ f \text{ es compacta y finito-dimensional}\}$.

Proposición II.1.2

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales reales normados, Ω un subconjunto cerrado de E y $f: \Omega \longrightarrow F$ una aplicación. Entonces, son equivalentes:

a) f es propia.

b) f es continua y $f^{-1}(K)$ es compacto en E, para todo subconjunto compacto K de F.

Proposición II.1.3

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales reales normados y Ω un subconjunto de E. Para cada $f \in \mathcal{K}(\Omega, F)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $f_\varepsilon \in \mathcal{F}(\Omega, F)$ tal que $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in \Omega$.

Lema II.1.4

Sean $(E,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial real normado, Ω un subconjunto cerrado de $R^k xE$ ($k\in N\cup\{0\}$), con $p_1(\Omega)$ acotado en R^k, y $f\in X(\Omega,E)$. Entonces, la aplicación $g:\Omega \longrightarrow E$ es propia.
$(\alpha,x)\longmapsto x-f(\alpha,x)$

Demostración.

Como g es continua, por II.1.2 es suficiente ver que para cada compacto K de E, se verifica que $g^{-1}(K)$ es compacto en $R^k xE$.

Consideremos una sucesión $\{(\alpha_n,x_n)\}_{n\in N}$ en $g^{-1}(K)$. Entonces, existe una subsucesión $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in N}$ de $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ que converge a un cierto $\alpha_0\in R^k$ (ya que $p_1(\Omega)$ es acotado en R^k). Por comodidad, volvemos a denotar por $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ a la subsucesión $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in N}$. Como $\overline{f(\Omega)}$ es compacto, existe $\{(\alpha_{n_k},x_{n_k})\}_{k\in N}$ subsucesión de $\{(\alpha_n,x_n)\}_{n\in N}$ tal que $\{f(\alpha_{n_k},x_{n_k})\}_{k\in N}$ converge a un cierto $y_0\in E$. Como para cada $k\in N$ $g(\alpha_{n_k},x_{n_k})=x_{n_k}-f(\alpha_{n_k},x_{n_k})\in K$ se tiene que existe $\{x_{n_{k_j}}-f(\alpha_{n_{k_j}},x_{n_{k_j}})\}_{j\in N}$ subsucesión convergente a un cierto elemento x_0 de K. Así, $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\in N}$ converge a x_0+y_0 y por tanto $\{(\alpha_{n_{k_j}},x_{n_{k_j}})\}_{j\in N}$ converge a $(\alpha_0,x_0+y_0)\in g^{-1}(K)$, por ser $g^{-1}(K)$ cerrado. Luego $g^{-1}(K)$ es compacto.∎

Observamos que la condición $p_1(\Omega)$ acotado es esencial en el lema anterior. Por ejemplo, la aplicación $f:R^2\longrightarrow R$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } y\geq 1 \\ y & \text{si } -1\leq y\leq 1, \\ -1 & \text{si } y\leq -1\end{cases}$$

es compacta y sin embargo la aplicación $g:R^2\longrightarrow R$ definida por $g(x,y)=y-f(x,y)$ no es propia

($p_1(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}$ no es acotado).

Sea $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Por 0.6.12 y 0.6.14 sabemos que $\Sigma:\Pi_{n+k}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ es un isomorfismo si $n\geq k+2$, por tanto la sucesión de homomorfismos

$$\Pi_{k+1}(S^1)\xrightarrow{\Sigma_1}\Pi_{k+2}(S^2)\xrightarrow{\Sigma_2}\Pi_{k+3}(S^3)\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow\Pi_{k+n}(S^n)\xrightarrow{\Sigma_n}$$

se "estabiliza" para un n suficientemente grande.

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, con la relación de orden usual $\leq$, es un conjunto dirigido y $\{\Pi_{k+n}(S^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de grupos. Si $i\leq j$ existe un homomorfismo $\Sigma_{i,j}:\Pi_{k+i}(S^i)\longrightarrow\Pi_{k+j}(S^j)$ definido por $\Sigma_{i,j}=\Sigma_{j-1}\circ\Sigma_{j-2}\circ\cdots\circ\Sigma_i$. Se tiene que $\Sigma_{i,i}=Id$, y si $i\leq j\leq l$ $\Sigma_{i,l}=\Sigma_{j,l}\circ\Sigma_{i,j}$. Así, $\{\Pi_{k+n}(S^n),\ \Sigma_{i,j}\ i,j\in\mathbb{N},\ \leq\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema directo de grupos.

Denotaremos por (Π_k,α_i), $\alpha_i:\Pi_{k+i}(S^i)\longrightarrow\Pi_k$, el límite directo del sistema directo anterior. Se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{k+i}(S^i) \arrow[r, "\Sigma_{i,j}"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & \Pi_{k+j}(S^j) \arrow[d, "\alpha_j"] \\
 & \Pi_k
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $i\leq j$.

Observemos que Π_k es isomorfo a $\Pi_{n+k}(S^n)$ $n\geq k+2$ y se le llama *grupo de homotopía estable* de S^0

La teoría del grado generalizado que a continuación vamos a desarrollar, tomará valores en Π_k.

Sean $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\times E$ con $0\in D$, $p_1(D)$ acotado de $\mathbb{R}^k$ y $g:\overline{D}\longrightarrow E$ una aplicación de la forma

$g(\alpha,x)=x-f(\alpha,x)$, donde $f:\bar{D}\longrightarrow E$ es compacta y $0\in E\setminus g(\partial D)$. Se tiene:

A) $r=\mathrm{dist}(0,g(\partial D))>0$.

En efecto:

Como g es propia (II.1.4), es cerrada y por tanto $g(\partial D)$ es un subconjunto cerrado de E. Así, existe $\varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon(0)\cap g(\partial D)=\emptyset$ y por tanto $r\geq\varepsilon>0$. ($B_\varepsilon(0)=\{x\in E:\mathrm{dist}(0,x)=\|x\|<\varepsilon\}$.

B) Si $r>0$ y $0<\varepsilon\leq r$, por II.1.3 se tiene que existe T_ε aplicación compacta y finito-dimensional de $\bar{D}$ en E, tal que $\|T_\varepsilon(z)-f(z)\|<\varepsilon$ para todo $z\in\bar{D}$. Si $g_\varepsilon:\bar{D}\longrightarrow E$ está definida por $g(\alpha,x)=x-T_\varepsilon(\alpha,x)$ y $T_\varepsilon(\bar{D})\subset L\{x_1,x_2,\dots,x_n\}=V_\varepsilon$ subespacio vectorial de dimensión n de E, definiendo $D_\varepsilon=D\cap(\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon)$ ($D_\varepsilon\neq\emptyset$, ya que $0\in D$) se tiene que $\bar{D}_\varepsilon\subset\bar{D}\cap(\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon)$ y $g_\varepsilon(\bar{D}_\varepsilon)\subset V_\varepsilon$. Observemos que como $\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon$ es cerrado en $\mathbb{R}^k\times E$, la adherencia de D_ε en $\mathbb{R}^k\times E$ y en $\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon$ coinciden. Por otro lado, si $(\alpha,x)\in\partial D_\varepsilon$, $\|g_\varepsilon(\alpha,x)\|=\|x-T_\varepsilon(\alpha,x)+f(\alpha,x)-f(\alpha,x)\|\geq$ $\geq\|x-f(\alpha,x)\|-\|f(\alpha,x)-T_\varepsilon(\alpha,x)\|>r-\varepsilon\geq0$ (observemos que $\partial D_\varepsilon\subset\partial D$). Por tanto, está definido el grado $d(g_\varepsilon|_{\bar{D}_\varepsilon},D_\varepsilon)\in\Pi_{n+k}(S^n)$ por ser $g_\varepsilon|_{\bar{D}_\varepsilon}$ una aplicación propia (II.1.4 y I.2.1).

Antes de continuar nos hace falta el siguiente lema.

Lema II.1.5

Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}^{k+n}$ con $0\in U$, $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ una aplicación continua y $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ la aplicación definida por $g(\alpha,x)=x-f(\alpha,x)$. Supongamos que g es propia y que $0\in\mathbb{R}^n\setminus g(\partial U)$. Entonces, $d(g,U)=\Sigma_{n-1}(d(g|_{\overline{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})}},U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})))$, donde $\Sigma_{n-1}:\Pi_{k+n-1}(S^{n-1})\longrightarrow\Pi_{n+k}(S^{n})$ es la suspensión.

Demostración.

<u>CASO I</u>

Supongamos que f es diferenciable y que $0\in(\text{v.r.})(g|_U)$.

Como

$g(\alpha,x_1,\ldots,x_n)=(x_1-f_1(\alpha,x_1,\ldots,x_n),\ldots,x_{n-1}-f_{n-1}(\alpha,x_1,\ldots,x_n),x_n)$
se tiene que $g(\alpha,x)=0$ si y solamente si $x_n=0$ y $x_j=f_j(\alpha,x_1,\ldots,x_{n-1},0)$ para todo $j=1,\ldots n-1$, o lo que es equivalente $(\alpha,x)\in U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})$ y $g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})}(\alpha,x)=0$. Así,

$g^{-1}(0)=(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})^{-1}(0)$.

Sea $(\alpha,x)\in g^{-1}(0)$. Entonces,

$$Dg(\alpha,x)=\begin{pmatrix}
\frac{-\partial f_1}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{-\partial f_1}{\partial\alpha_k} & 1-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{-\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\cdots\frac{-\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{-\partial f_1}{\partial x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{-\partial f_{n-1}}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{-\partial f_{n-1}}{\partial\alpha_k} & \frac{-\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{-\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\cdots 1-\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{-\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\\
0\ \cdots\ 0 & 0 & 0\ \cdots\ 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\text{y } D(g|\ )(\alpha,x)=\begin{pmatrix} \frac{-\partial f_1}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{-\partial f_1}{\partial\alpha_k} & 1-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{-\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\cdots\frac{-\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-\partial f_{n-1}}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{-\partial f_{n-1}}{\partial\alpha_k} & \frac{-\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{-\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\cdots 1-\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

y por tanto $\mathrm{Ker}Dg(\alpha,x)=\mathrm{ker}D(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})(\alpha,x)\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1}$. Si denotamos por $N(\alpha,x)$ y $N'(\alpha,x)$ a los espacios normales a $g^{-1}(0)$ en el punto (α,x) en $\mathbb{R}^{n+k}$ y $\mathbb{R}^{n+k-1}$ respectivamente, se tiene que $N(\alpha,x)=N'(\alpha,x)\oplus[(0,0,\ldots,0,1)]$. Sea $F_{(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})}=\{u_1,\ldots,u_{n-1}\}$ la referencia normal a $g^{-1}(0)$ inducida por $g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})}$.

Entonces, $D(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})(\alpha,x)(u_j(\alpha,x))=e_j$ para todo $j\in\{1,\ldots n-1\}$ y como $Dg(\alpha,x)(e_{n+k})=(\frac{-\partial f_1}{\partial x_n},\cdots\cdots,\frac{-\partial f_{n-1}}{\partial x_n},1)$ y $Dg(\alpha,x)(u_j(\alpha,x))=e_j$, se verifica que $F_g=\{u_1,\ldots,u_{n-1},u_n\}$, donde $u_n(\alpha,x)=\frac{\partial f_1}{\partial x_n}u_1(\alpha,x)+\cdots+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}u_{n-1}(\alpha,x)+e_{n+k}$, es la referencia normal de $g^{-1}(0)$ inducida por g.

Sea $G_1:g^{-1}(0)\longrightarrow GL_+(\mathbb{R}^n)$ la aplicación diferenciable definida por

$$G_1(\alpha,x) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, La aplicación $G: g^{-1}(0)\times I \longrightarrow GL_+(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$G((\alpha,x),t) = \begin{bmatrix} 1 & 0\cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 & 0 \\ \dfrac{t\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{t\partial f_{n-1}}{\partial x_n} & 1 \end{bmatrix}$$ es diferenciable, $G_0=\mathrm{Id}$

y $G((\alpha,x),1)=G_1(\alpha,x)$ y por tanto, $(g^{-1}(0)\times I,F)$ donde $F((\alpha,x),t)=G((\alpha,x),t)(u_1,\ldots,u_{n-1},e_{n+k})$ realiza una homología entre $(g^{-1}(0),F_g)$ y $(g^{-1}(0),\{u_1,\ldots,u_{n-1},e_{n+k}\})$. Así, $[(g^{-1}(0),F_g)]=[(g^{-1}(0),EF_{(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})})]=$

$= E([(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})^{-1}(0),F_{(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})}])$. Por la definición del grado generalizado y 0.6.11 se tiene demostrado el Lema II.1.5 en este primer caso.

CASO II (Caso general)

Supongamos que f es continua. Sea D un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$ con $g^{-1}(0)\subset D\subset\bar{D}\subset U$. Sabemos que existe $h:\bar{D}\longrightarrow\mathbb{R}^{n-1}$, aplicación diferenciable tal que $\|h(\alpha,x)-f(\alpha,x)\|<\mathrm{dist}(0,g(\partial D))$ y

$0\in(\text{v.r.})(g'|_D)$, donde $g'(\alpha,x)=x-h(\alpha,x)$. Se tiene que $\|g'(\alpha,x)-g(\alpha,x)\|=\|h(\alpha,x)-f(\alpha,x)\|<\text{dist}(0,g(\partial D))$ para cada $(\alpha,x)\in\bar{D}$. Como $\text{dist}(0,g(\partial D))\le\text{dist}(0,(g|_{D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})})(\partial(D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1}))))$,

$d(g,U)=d(g|_{\bar{D}},D)=d(g',D)$ y $d(g|_{U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})},U\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1}))=$

$=d(g|_{D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})},D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1}))=d(g'|_{D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})},D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1}))$.

Utilizando el Caso I, se tiene que

$d(g',D)=\Sigma_{n-1}(d(g'|_{D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})},D\cap(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-1})))$ y se concluye la demostración.∎

Estamos en condiciones de definir el grado generalizado en el caso en el que D es un subconjunto abierto, de $\mathbb{R}^k\times E$ con $0\in D$, $p_1(\bar{D})$ acotado en $\mathbb{R}^k$ y $g:(\bar{D},\partial D)\longrightarrow(E,E\setminus\{0\})$ está definida por $g(\alpha,x)=x-f(\alpha,x)$, donde $f:\bar{D}\longrightarrow E$ es una aplicación compacta.

Sean $\varepsilon\le r=\text{dist}(0,g(\partial D))$ y T_ε una aproximación compacta y finito-dimensional de f tal que $\|f(\alpha,x)-T_\varepsilon(\alpha,x)\|<\varepsilon$ para todo $(\alpha,x)\in\bar{D}$. Se define $d(g,D)=\alpha_n(d(g_\varepsilon,D_\varepsilon))\in\Pi_k$, siendo $g_\varepsilon(\alpha,x)=x-T_\varepsilon(\alpha,x)$, $D_\varepsilon=D\cap(\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon)$ y $n=\dim V_\varepsilon$ $(T_\varepsilon(\bar{D})\subset V_\varepsilon)$.

Lema II.1.6

El grado generalizado, definido en el párrafo anterior, no depende de ε, V_ε y T_ε.

Demostración

Sean $0<\varepsilon\le r$ y $0<\eta\le r$. Se considera $V_\mu=L\{V_\varepsilon,V_\eta\}$. Supongamos que $\dim V_\mu=s$, $\dim V_\varepsilon=n$ y $\dim V_\eta=m$. Sea $D_\mu=D\cap V_\mu$. Entonces, $T_\varepsilon(\bar{D})\subset V_\varepsilon\subset V_\mu$ y

$T_\eta(\bar{D})\subset V_\eta\subset V_\mu$ y por tanto, por el lema anterior, se verifica que $d(g_\varepsilon,D_\mu)=\Sigma_{n,s}(d(g_\varepsilon,D_\varepsilon))$ y $d(g_\eta,D_\mu)=\Sigma_{m,s}(d(g_\eta,D_\eta))$.

Por otra parte, como la aplicación $H:\bar{D}_\mu\times I\longrightarrow V_\mu$, definida por $H(z,t)=tg_\varepsilon(z)+(1-t)g_\eta(z)$, verifica que $H((\partial D_\mu)\times I)\subset V_\mu\setminus\{0\}$, se tiene que $d(g_\varepsilon,D_\mu)=d(g_\eta,D_\mu)$. En consecuencia, $\alpha_n(d(g_\varepsilon,D_\varepsilon)) = (\alpha_s\circ\Sigma_{n,s})(d(g_\varepsilon,D_\varepsilon)) = \alpha_s(d(g_\varepsilon,D_\mu)) = \alpha_s(d(g_\eta,D_\mu)) = (\alpha_s\circ\Sigma_{m,s})(d(g_\eta,D_\eta)) = \alpha_m(d(g_\eta,D_\eta))$. De esta manera hemos llegado a la igualdad $\alpha_n(d(g_\varepsilon,D_\varepsilon)) = \alpha_m(d(g_\eta,D_\eta))$.■

Definición II.1.7

Sean $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, E un espacio vectorial real normado, D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\times E$ con $p_1(D)$ acotado en $\mathbb{R}^k$, $g:(\bar{D},\partial D)\longrightarrow(E,E\setminus\{0\})$ una aplicación de la forma $g(\alpha,x)=x-f(\alpha,x)=(p_2-f)(\alpha,x)$, donde $f:\bar{D}\longrightarrow E$ es una aplicación compacta y $p_2(\alpha,x)=x$. Se define $d(g,D) = d(g\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)},G_{(\alpha_0,x_0)}) \in \Pi_k$, donde $(\alpha_0,x_0)\in D$, $G_{(\alpha_0,x_0)}=D-(\alpha_0,x_0)$, $\tau_{(\alpha_0,x_0)}:G_{(\alpha_0,x_0)}\longrightarrow D$ es la traslacion $\tau_{(\alpha_0,x_0)}(\alpha,x)=(\alpha,x)+(\alpha_0,x_0)$ y $d(g\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)},G_{(\alpha_0,x_0)})$ es el elemento de Π_k definido en el párrafo anterior al lema II.1.6 ($(0,0)\in G_{(\alpha_0,x_0)}$ y $(g\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)})(\alpha,x)=x-(f(\alpha+\alpha_0,x+x_0)-x_0)$ cumple que $0\notin(g\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)})(\partial G_{(\alpha_0,x_0)}) = g(\partial D)$).

Justificación de la Definición II.1.7

Teniendo en cuenta el lema anterior, es suficiente demostrar que $d(g\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)},G_{(\alpha_0,x_0)}) = d(g\circ\tau_{(\alpha_1,x_1)},G_{(\alpha_1,x_1)})$ para cualesquiera (α_0,x_0) y (α_1,x_1) de D.

Sea ε un número real positivo menor que $r = \mathrm{dist}(0,g(\partial D)) =$

$\mathrm{dist}(0,(g\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)})(\partial G_{(\alpha_0,x_0)})) = \mathrm{dist}(0,(g\circ\tau_{(\alpha_1,x_1)})(\partial G_{(\alpha_1,x_1)}))$.

Por la proposición II.1.3, existe $T_\varepsilon \in \mathcal{F}(\overline{D},E)$ tal que $\|T_\varepsilon(\alpha,x)-f(\alpha,x)\|<\varepsilon$ para todo $(\alpha,x)\in\overline{D}$. Sean V, el subespacio vectorial finito-dimensional de E tal que $T_\varepsilon(\overline{D})\subset V$, $V_\varepsilon=L\{V\cup\{x_0,x_1\}\}$ y $n=\dim V_\varepsilon$.

Se consideran las aplicaciones compactas finito-dimensionales $T^0_\varepsilon:\overline{G}_{(\alpha_0,x_0)}\longrightarrow V_\varepsilon$, $T^1_\varepsilon:\overline{G}_{(\alpha_1,x_1)}\longrightarrow V_\varepsilon$, definidas por $T^0_\varepsilon(\alpha,x) = T_\varepsilon(\alpha+\alpha_0,x+x_0)-x_0$ y $T^1_\varepsilon(\alpha,x) = T_\varepsilon(\alpha+\alpha_1,x+x_1)-x_1$ respectivamente. Como $\|T^0_\varepsilon(\alpha,x)-(f(\alpha+\alpha_0,x+x_0)-x_0)\|<\varepsilon$ para todo $(\alpha,x)\in\overline{G}_{(\alpha_0,x_0)}$ y $\|T^1_\varepsilon(\alpha,x)-(f(\alpha+\alpha_1,x+x_1)-x_1)\|<\varepsilon$ para todo $(\alpha,x)\in\overline{G}_{(\alpha_1,x_1)}$, se tiene que $d(g\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)},G_{(\alpha_0,x_0)}) = \alpha_n(d(g^0_\varepsilon,D^0_\varepsilon))$ y $d(g\circ\tau_{(\alpha_1,x_1)},G_{(\alpha_1,x_1)}) = \alpha_n(d(g^1_\varepsilon,D^1_\varepsilon))$, donde $g^0_\varepsilon=p_2-T^0_\varepsilon$, $g^1_\varepsilon=p_2-T^1_\varepsilon$, $D^0_\varepsilon=G_{(\alpha_0,x_0)}\cap(\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon)$ y $D^1_\varepsilon=G_{(\alpha_1,x_1)}\cap(\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon)$. Por tanto, todo se reduce a ver que $d(g^0_\varepsilon,D^0_\varepsilon) = d(g^1_\varepsilon,D^1_\varepsilon)$.

Se tiene que $\varphi=\tau_{(-\alpha_1,-x_1)}\circ\tau_{(\alpha_0,x_0)}=\tau_{(-\alpha_1+\alpha_0,-x_1+x_0)}$ es un homeomorfismo (difeomorfismo) de $\overline{D^0_\varepsilon}$ sobre $\overline{D^1_\varepsilon}$ tal que $g^1_\varepsilon\circ\varphi=g^0_\varepsilon$ ($\varphi(D^0_\varepsilon)=D^1_\varepsilon$ y por tanto $\varphi(\overline{D^0_\varepsilon})=\overline{D^1_\varepsilon}$). Ahora, como $\varphi_{n+k}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}_{n+k}:\varphi_{n+k}(\overline{D^0_\varepsilon})\longrightarrow\varphi_{n+k}(\overline{D^1_\varepsilon})$ admite una extensión a un homeomorfismo $h:S^{n+k}\longrightarrow S^{n+k}$ de grado 1, por I.1.11 se deduce que $d(g^0_\varepsilon,D^0_\varepsilon) = d(g^1_\varepsilon\circ\varphi,D^0_\varepsilon) = d(g^1_\varepsilon,D^1_\varepsilon)$.∎

Lema II.1.8

Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\times E$ con $p_1(\overline{D})$ acotado en $\mathbb{R}^k$ $g:\overline{D}\longrightarrow E$ una aplicación de la forma $g(\alpha,x)=x-T(\alpha,x)$ con T aplicación compacta y $0\in E\setminus g(\partial D)$ y $r=\mathrm{dist}(0,g(\partial D))$.

Sea $S:\overline{D}\longrightarrow E$ una aplicación compacta tal que

$\|S(\alpha,x)-T(\alpha,x)\|<r/2$ para cada $(\alpha,x)\in\bar{D}$. Se considera la aplicación $h:\bar{D}\longrightarrow E$ definida por $h(\alpha,x)=x-S(\alpha,x)$. Entonces:

1) $o\in E\setminus h(\partial D)$.

2) $d(h,D) = d(g,D)$.

Demostración

Si $(\alpha_0,x_0)\in D$, para todo $(\alpha,x)\in G_{(\alpha_0,x_0)}=D-(\alpha_0,x_0)$ se verifica que $\|S(\alpha+\alpha_0,x+x_0)-x_0-(T(\alpha+\alpha_0,x+x_0)-x_0)\|<r/2$. Así, por la definición II.1.7 podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $0\in D$.

1) Si $x\in\partial D$, se tiene que $\|h(\alpha,x)\| = \|h(\alpha,x)-g(\alpha,x)+g(\alpha,x)\|\geq \|g(\alpha,x)\|-\|h(\alpha,x)-g(\alpha,x)\|>r-r/2>0$.

2) Sean $\varepsilon=r/4$, $T_\varepsilon:\bar{D}\longrightarrow E$ y $S_\varepsilon:\bar{D}\longrightarrow E$ aplicaciones compactas finito-dimensionales, tales que $\|T(\alpha,x)-T_\varepsilon(\alpha,x)\|<r/4$ para todo $(\alpha,x)\in\bar{D}$ y $\|S(\alpha,x)-S_\varepsilon(\alpha,x)\|<r/4$ para todo $(\alpha,x)\in\bar{D}$, $T_\varepsilon(\bar{D})\subset V_\varepsilon^T$ y $S_\varepsilon(\bar{D})\subset V_\varepsilon^S$. Sea $V=L\{V_\varepsilon^T\cup V_\varepsilon^S\}$ y $\dim V=n$. Entonces, $d(h,D)=\alpha_n(d(h_\varepsilon,D_V))$, donde $h_\varepsilon(\alpha,x)=x-S_\varepsilon(\alpha,x)$ y $D_V=D\cap(R^k\times V)$, y $d(g,D)=\alpha_n(d(g_\varepsilon,D_V))$, donde $g_\varepsilon(\alpha,x)=x-T_\varepsilon(\alpha,x)$.

Sea $F:\bar{D}_V\times I\longrightarrow V$ la aplicación definida por $F((\alpha,x),t) = th_\varepsilon(\alpha,x)+(1-t)g_\varepsilon(\alpha,x)$. Si $(\alpha,x)\in\partial D_V\subset\partial D$ y $t\in I$, se verifica que $\|F((\alpha,x),t)\| = \|th_\varepsilon(\alpha,x)+(1-t)g_\varepsilon(\alpha,x)\|\geq$

$$\geq\|g(\alpha,x)\|-\|th_\varepsilon(\alpha,x)+(1-t)g_\varepsilon(\alpha,x)-g(\alpha,x)\|\geq$$
$$\geq r-t\|h_\varepsilon(\alpha,x)-g(\alpha,x)\|-(1-t)\|g_\varepsilon(\alpha,x)-g(\alpha,x)\|\geq$$
$$\geq r-t\|h_\varepsilon(\alpha,x)-h(\alpha,x)\|-t\|h(\alpha,x)-g(\alpha,x)\|-(1-t)r/4>$$
$$>r-tr/4-tr/2-(1-t)r/4\geq 0.$$

Entonces, $d(g_\varepsilon,D_V) = d(h_\varepsilon,D_V)$ y por tanto $d(g,D) = d(h,D)$.■

Proposición II.1.9 (Invariancia por homotopías)

Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\times E$, con $p_1(D)$ acotado en $\mathbb{R}^k$, $H:\bar{D}\times I\longrightarrow E$ una aplicación compacta y $F:\bar{D}\times I\longrightarrow E$ la aplicación definida por $F((\alpha,x),t)=x-H((\alpha,x),t)$. Supongamos que $0\in E\setminus F(\partial D\times I)$. Entonces, $d(F_t,D)$ es constante al variar t en $[0,1]$.

Demostración

Como H es compacta, el Lema II.1.4 implica que $F:\bar{D}\times I\longrightarrow E$ es una aplicación propia, por tanto, $F(\partial D\times I)$ es cerrado y $\mathrm{dist}(0,F(\partial D\times I))>0$.

Sea $K=\overline{H(\bar{D}\times I)}$, subconjunto compacto de E. Entonces, $Id_K:K\longrightarrow E$ es compacta y así, existe $T:K\longrightarrow E$ aplicación compacta y finito-dimensional, tal que $\|T(x)-Id_K(x)\|<r/2$ para todo $x\in K$.

Sea $G:\bar{D}\times I\longrightarrow E$ la aplicación definida por $G((\alpha,x),t)=x-(T\circ H)((\alpha,x),t)$ y V subespacio finito-dimensional de E con $T(K)\subset V$ y $\dim V=n$.

Si $y\in\bar{D}$, $\|H_t(y)-(T\circ H_t)(y)\|<r/2$ y así, por el lema anterior, $d(F_t,D)=d(G_t,D)$, pero $d(g_t,D)=\alpha_n(d(G_t|_{\overline{D\cap(\mathbb{R}^k\times V)}},D\cap(\mathbb{R}^k\times V)))$ es constante al variar t en $[0,1]$, por tanto $d(F_t,D)$ es constante al variar t en $[0,1]$.■

Proposición II.1.10

El grado generalizado definido para aplicaciones $f:(\bar{D},\partial D)\longrightarrow(E,E\setminus\{0\})$, donde D es un abierto de $\mathbb{R}^k\times E$, con $p_1(\bar{D})$ acotado en $\mathbb{R}^k$, y $f(\alpha,x)=x-F(\alpha,x)$ con T compacto, tiene, además, las siguientes propiedades:

1) *Solución.* Si $d(f,D)\neq 0$, existe $(\alpha_0,x_0)\in D$ tal que

$f(\alpha_0, x_0)=0$.

2) *Escisión*. Si $U\subset D$ es un abierto y $f(D\setminus U)\subset E\setminus\{0\}$, se verifica que $d(f|_{\bar{U}}, U) = d(f, D)$.

3) *Aditividad*. Si U_1 y U_2 son abiertos contenidos en D, tales que $U_1\cap U_2=\emptyset$ y $f(D\setminus(U_1\cup U_2)) \subset E\setminus\{0\}$, entonces, $d(f,D) = d(f|_{\bar{U}_1}, U_1)+d(f|_{\bar{U}_2}, U_2)$.

Demostración

Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $0\in D$.

1) Sea $r=\text{dist}(0, f(\partial D))>0$ y $n_0\in N$ tal que $\frac{1}{n_0}<r$. Sean, también, para cada $n\in N$ $\varepsilon_n=\frac{1}{n+n_0}<r$. Entonces, $d(f,D) = \alpha_{s_n}(d(f_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon_n}))$, donde $\dim V_{\varepsilon_n}=s_n$.

Como $d(f,D)\neq 0$, se tiene que $d(f_{\varepsilon_n}, D_{\varepsilon_n})\neq 0$ para todo $n\in N$, y así por la propiedad de solución para el grado generalizado en espacios euclídeos, existe $(\alpha_n, x_n)\in D_{\varepsilon_n}$ tal que $f_{\varepsilon_n}(\alpha_n, x_n)=0$.

Como T es compacto, existe $\{(\alpha_{n_k}, x_{n_k})\}_{k\in N}$ tal que $\{T(\alpha_{n_k}, x_{n_k})\}_{k\in N}$ converge a $y\in E$. Como $\|T(\alpha_{n_k}, x_{n_k})-T_{\varepsilon_{n_k}}(\alpha_{n_k}, x_{n_k})\|$ converge a cero, $\{T_{\varepsilon_{n_k}}(\alpha_{n_k}, x_{n_k})\}_{k\in N}$ también converge a y.

Entonces, $\{x_{n_k}\}_{k\in N} = \{f_{\varepsilon_{n_k}}(\alpha_{n_k}, x_{n_k})+T_{\varepsilon_{n_k}}(\alpha_{n_k}, x_{n_k})\}_{k\in N}$ es una sucesión convergente a y. Como además existe $\{\alpha_{n_{k_j}}\}_{j\in N}$, subsucesión de $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in N}$, convergente a $\alpha_0\in R^k$, la sucesión $\{(\alpha_{n_{k_j}}, x_{n_{k_j}})\}_{j\in N}$ converge a $(\alpha_0, y)\in\bar{D}$. Por tanto, $\{f(\alpha_{n_{k_j}}, x_{n_{k_j}})\}_{j\in N} = \{x_{n_{k_j}}-T(\alpha_{n_{k_j}}, x_{n_{k_j}})\}_{j\in N}$ converge a $y-y=0$ y así,

$f(\alpha_0,y)=0$.

2) Como f es propia, se tiene que $f(\bar{D}\setminus U)$ es un cerrado y por tanto, $r'=\mathrm{dist}(0,f(\bar{D}\setminus U))>0$. Sea $T_\varepsilon:\bar{D}\longrightarrow E$ una aplicación compacta y finito-dimensional tal que $\|T_\varepsilon(\alpha,x)-T(\alpha,x)\|<\varepsilon\le r'$. Al ser $\mathrm{dist}(0,f(\partial D))\ge r'$ y $\mathrm{dist}(0,f(\partial U))\ge r'$, si $f_\varepsilon(\alpha,x)=x-T_\varepsilon(\alpha,x)$, $T_\varepsilon(\bar{D})\subset V_\varepsilon$ con $\dim V_\varepsilon=n$, $D_\varepsilon=D\cap(\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon)$ y $U_\varepsilon=U\cap(\mathbb{R}^k\times V_\varepsilon)$ se cumple que $d(f,D)=\alpha_n(d(f_\varepsilon,D_\varepsilon))$ y $d(f,U)=\alpha_n(d(f_\varepsilon,U_\varepsilon))$.

Pero si $(\alpha,x)\in\bar{D}_\varepsilon\setminus U_\varepsilon$, $\|f_\varepsilon(\alpha,x)\|=\|f(\alpha,x)+f_\varepsilon(\alpha,x)-f(\alpha,x)\|\ge$ $\ge\|f(\alpha,x)\|-\|f_\varepsilon(\alpha,x)-f(\alpha,x)\|>r'-\varepsilon\ge 0$. Así, $f_\varepsilon(\alpha,x)\ne 0$ para todo $(\alpha,x)\in\bar{D}_\varepsilon\setminus U_\varepsilon$ y por la propiedad de escisión para el grado generalizado en espacios euclídeos, se deduce que $d(f_\varepsilon,D_\varepsilon)=d(f_\varepsilon|_{\bar{U}_\varepsilon},U_\varepsilon)$.

3) Por 2), se puede suponer que $\bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\emptyset$, y probar que $d(f,U_1\cup U_2)=d(f|_{\bar{U}_1},U_1)+d(f|_{\bar{U}_2},U_2)$.

Sea $T_\varepsilon:\bar{D}\longrightarrow E$ una aplicación compacta y finito-dimensional aproximación de T, válida para f, $f|_{\bar{U}_1}$ y $f|_{\bar{U}_2}$.

En consecuencia, $d(f,U_1\cup U_2)=\alpha_n(d(f_\varepsilon,U_{1_\varepsilon}\cup U_{2_\varepsilon}))$, $d(f|_{\bar{U}_1},U_1)=\alpha_n(d(f_\varepsilon|_{\bar{U}_{1_\varepsilon}},U_{1_\varepsilon}))$ y $d(f|_{\bar{U}_2},U_2)=\alpha_n(d(f_\varepsilon|_{\bar{U}_{2_\varepsilon}},U_{2_\varepsilon}))$, donde $n=\dim V_\varepsilon$, siendo V_ε un subespacio vectorial de E con $T_\varepsilon(\bar{D})\subset V_\varepsilon$. Como podemos tomar $n\ge k+2$, $d(f_\varepsilon,U_{1_\varepsilon}\cup U_{2_\varepsilon})=d(f_\varepsilon|_{\bar{U}_{1_\varepsilon}},U_{1_\varepsilon})+d(f_\varepsilon|_{\bar{U}_{2_\varepsilon}},U_{2_\varepsilon})$ y se tiene el resultado.∎

Es interesante señalar que según la propiedad 3 de la proposición anterior, se puede construir un grado generalizado d' en espacios euclídeos (caso particular de espacios vectoriales normados) verificando siempre la propiedad aditiva, pero esto plantearía en numerosos casos pérdida de información pues si $d(f,U)\in\Pi_{n+k}(S^n)$ no es nulo y $\Sigma(d(f,U))=0$, para d' se tendría que $d'(f,U)=0$ no pudiéndose deducir la existencia de soluciones de la ecuación $f(\alpha,x)=0$ en U, aún teniéndolas por ser $d(f,U)\neq 0$.

II.2. GRADO GENERALIZADO PARA PERTURBACIONES γ-CONDENSANTES DE LA PROYECCION $p_2:R^k\times E\longrightarrow E$.

Una vez definido el grado generalizado para perturbaciones compactas de $p_2:R^k\times E\longrightarrow E$, es posible extender el mismo para una clase mas amplia de aplicaciones.

Para nuestros objetivos es necesario introducir algunas notaciones y definiciones.

E denotará ahora un espacio de *Banach* real y $\mathcal{B}$ la familia de los subconjuntos acotados de E.

Definición II.2.1 ([5], pag. 41)

a) A la aplicación $\alpha:\mathcal{B}\longrightarrow R^+$, definida por $\alpha(B)=\inf\{d>0$: B admite un recubrimiento finito por conjuntos de diámetro menor o igual que $d\}$ para cada $B\in\mathcal{B}$, se le llama *medida de no compacidad de Kuratowski*.

b) A la aplicación $\beta:\mathcal{B}\longrightarrow R^+$, definida por $\beta(B)=\inf\{d>0$: B admite un recubrimiento finito por bolas de radio $d\}$ para cada $B\in\mathcal{B}$, se le llama *medida de no compacidad por bolas*.

A lo largo del capítulo haremos uso de las propiedades mas importantes α y β que enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición II.2.2 ([5], pag. 41)

Si la aplicación $\gamma:\mathcal{B}\longrightarrow R^+$ representa a la aplicación α o β, se verifica que:

a) $\gamma(B)=0$ si y solamente si $\bar{B}$ es compacto.

b) γ es una seminorma, es decir, $\gamma(\lambda B)=|\lambda|\gamma(B)$ y

$\gamma(B_1+B_2)\leq\gamma(B_1)+\gamma(B_2)$.

c) $B_1\subset B_2$ implica que $\gamma(B_1)\leq\gamma(B_2)$.

d) $\gamma(B_1\cup B_2)=\max\{\gamma(B_1),\gamma(B_2)\}$.

e) $\gamma(\mathrm{conv}(B))=\gamma(B)$, donde conv(B) denota la envoltura convexa de B.

Ahora introducimos las definiciones de las clases de funciones que manejaremos.

Definición II.2.3

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^k\times E$ y $F:\Omega\longrightarrow E$ una aplicación continua acotada, es decir, F es continua y transforma conjuntos acotados de Ω en subconjutos acotados de E. Se dice que F es *γ-Lipschitziana* si existe $k\geq 0$ tal que $\gamma(F(B))\leq k\gamma(B)$ para todo subconjunto B de Ω perteneciente a $\mathcal{B}$.

Si $k>1$ diremos que F es una aplicación ***estrictamente γ-contractiva***, y diremos que F es ***γ-condensante*** si $\gamma(F(B))<\gamma(B)$ para cada subconjunto B de Ω acotado con $\gamma(B)>0$.

Observemos que toda aplicación estrictamente γ-contractiva es γ-condensante.

Denotaremos por $\mathcal{SC}_\gamma(\Omega)=\{\ F:\Omega\longrightarrow E:\ F$ es estrictamente γ-contractiva$\}$ y por $\mathcal{C}_\gamma(\Omega)=\{\ F:\Omega\longrightarrow E:\ F$ es γ-condensante$\}$.

Una importante propiedad de las aplicaciones de $\mathcal{C}_\gamma(\Omega)$ viene dada por la siguiente proposición.

Proposición II.2.4

Sean $\bar{\Omega}$ un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^k\times E$, con $p_1(\bar{\Omega})$ acotado en $\mathbb{R}^k$, y $F\in\mathcal{C}_\gamma(\bar{\Omega})$. Entonces, la aplicación $f:\bar{\Omega}\longrightarrow E$ definida por $f(\alpha,x)=x-F(\alpha,x)=(p_2-F)(\alpha,x)$ es propia.

Demostración

Sea K un subconjunto compacto de E y sea $A=f^{-1}(K)$. Entonces, A es un subconjunto cerrado de $\bar{\Omega}$ y $(p_2-F)(A)=f(A)\subset K$. Así, $p_2(A)\subset K+F(A)$ y por tanto $\gamma(p_2(A)) \le \gamma(K)+\gamma(F(A)) = \gamma(F(A))$.

Por otra parte, $A\subset p_1(A)\times\{0\}+\{0\}\times p_2(A)$ y como $p_1(A)$ es relativamente compacto, se tiene que
$\gamma(A) \le \gamma(p_1(A)\times\{0\})+\gamma(\{0\}\times p_2(A)) = \gamma(\{0\}\times p_2(A))$ de donde se deduce que $\gamma(A)\le\gamma(F(A))$. Como F es γ-condensante, $\gamma(A)$ ha de ser cero y $A=\bar{A}$ es compacto.∎

El ejemplo que sigue a II.1.4, prueba que en la proposición anterior la condición $p_1(\bar{\Omega})$ acotado en $\mathbb{R}^k$ es esencial. Observemos también que la hipótesis de completitud de E es necesaria para que $\gamma(A)=0$ implique que $\bar{A}$ es compacto.

Tras estos resultados previos ya estamos en condiciones de desarrollar la construcción del grado. Esta construcción la dividiremos en diversos pasos.

A) Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\times E$, con $p_1(\Omega)$ acotado en $\mathbb{R}^k$, $F:\bar{\Omega}\longrightarrow E$ un elemento de $\mathcal{K}_\gamma(\bar{\Omega})$, con $F(\bar{\Omega})$ acotado en E, y $f=p_2-F$, con $f(\partial\Omega)\subset E\setminus\{0\}$.

Sean $C_0 = \overline{\mathrm{Conv}}(F(\bar{\Omega}))$, $C_1 = \overline{\mathrm{Conv}}(F(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_0)))$ y $C_{n+1}=\overline{\mathrm{Conv}}(F(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_n)))$ para todo $n\ge 1$. Es evidente que $C_{n+1}\subset C_n$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Como $\gamma(C_{n+1}) = \gamma(\overline{\mathrm{Conv}}(F(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_n)))) = \gamma(F(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_n))) \le k\gamma(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_n)) \le k\gamma(C_n)$, y $k<1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \gamma(C_n)=0$, y así si definimos $C_\infty= \bigcap_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C_n$, se verifica que C_∞

es convexo, cerrado, $\gamma(C_\infty)=0$ y en consecuencia C_∞ es un subconjunto convexo y compacto de E.

Supongamos que $(\alpha,x)\in\overline{\Omega}$ es tal que $f(\alpha,x)=0$ y sea $n\in\mathbb{N}$. Como $f(\alpha,x)=x-F(\alpha,x)=0$, se verifica que $x=F(\alpha,x)$ y por tanto $x\in C_0$, $F(\alpha,x)\in C_1$ y entonces $x\in C_2$, así en una cantidad finita de pasos deducimos que $x\in C_n$. Se ha probado por lo tanto que $f^{-1}(0)\subset\Omega\cap(\mathbb{R}^k\text{x}C_\infty)$.

B) Supongamos que $C_\infty\neq\emptyset$ y que $R:\text{E}\longrightarrow C_\infty$ es una retracción continua (la existencia de R está asegurada por el *teorema de extensión de Dugundji*). Entonces, $\begin{array}{l}\widetilde{R}:\mathbb{R}^k\text{xE}\longrightarrow\mathbb{R}^k\text{x}C_\infty\\ \quad(\alpha,x)\longmapsto(\alpha,R(x))\end{array}$ es también una retracción continua que seguiremos denotando por R.

Se tiene que $R^{-1}(\Omega)\cap\Omega$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k\text{xE}$ con $p_1(R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$ acotado en $\mathbb{R}^k$ y $F\circ R:\overline{R^{-1}(\Omega)\cap\Omega}\longrightarrow\text{E}$ es una aplicación compacta. Además $f^{-1}(0)=(p_2-F\circ R)^{-1}(0)\subset R^{-1}(\Omega)\cap\Omega$. En efecto: si $(p_2-F\circ R)(\alpha,x)=0$ se tiene que $x=F\circ R(\alpha,x)$ y como $R(\alpha,x)\in\Omega\cap(\mathbb{R}^k\text{x}C_\infty)$ y $F(\Omega\cap(\mathbb{R}^k\cap C_\infty))\subset C_\infty$ se deduce que $x\in C_\infty$. Así, $x=(F\circ R)(\alpha,x)=F(\alpha,x)$ y por tanto $(\alpha,x)\in f^{-1}(0)$.

Acabamos de ver que $\text{d}(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$ está definido, según lo establecido en la sección II.1. Definimos $\text{d}(f,\Omega)=\text{d}(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$. Si por el contrario $C_\infty=\emptyset$, como $f^{-1}(0)\subset\Omega\cap(\mathbb{R}^k\text{x}C_\infty)$ se tiene que $f^{-1}(0)$ será vacío y en ese caso definimos $\text{d}(f,\Omega)=0$.

Es necesario ver que la definición es consistente, es decir, si $R,\widetilde{R}:\mathbb{R}^k\text{xE}\longrightarrow\mathbb{R}^k\text{x}C_\infty$ son dos retracciones continuas como antes, se verifica que $\text{d}(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)=\text{d}(p_2-F\circ\widetilde{R},\widetilde{R}^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$.

Para ello, sean $\Omega_1=R^{-1}(\Omega)\cap\Omega$, $\Omega_2=\tilde{R}^{-1}(\Omega)\cap\Omega$ y $\Omega_3=\Omega_1\cap\Omega_2$. Por la propiedad de escisión II.1.10 2) tenemos que $d(p_2-F\circ R,\Omega_1) = d(p_2-F\circ R,\Omega_3)$ y $d(p_2-F\circ\tilde{R},\Omega_2) = d(p_2-F\circ\tilde{R},\Omega_3)$.

Si tomamos $H:\bar{\Omega}_3\times I\longrightarrow E$ definida por $H((\alpha,x),t)=t(F\circ R)(\alpha,x)+(1-t)(F\circ\tilde{R})(\alpha,x)$, se verifica que H es compacta y la igualdad $x-H((\alpha,x),t)=0$ implicaría que $x=t(F\circ R)(\alpha,x)+(1-t)(F\circ\tilde{R})(\alpha,x)$. Las condiciones $R(\alpha,x)\in\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_\infty)$, $\tilde{R}(\alpha,x)\in\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_\infty)$ y $F(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_\infty))\subset C_\infty$ nos permiten deducir que $x\in C_\infty$, $R(\alpha,x)=\tilde{R}(\alpha,x)=(\alpha,x)$ y por lo tanto $(p_2-H)^{-1}(0)=f^{-1}(0)\times I\subset\Omega_3\times I$. De II.1.10 3) obtenemos que $d(p_2-F\circ R,\Omega_3) = d(p_2-F\circ\tilde{R},\Omega_3)$. ∎

Obs. II.2.5

Sean $\bar{\Omega}\subset\mathbb{R}^k\times E$ y $F\in\mathcal{K}_\gamma(\bar{\Omega})$ como en A). Consideremos C subconjunto convexo y cerrado de E conteniendo a C_∞ verificando $F(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C))\subset C$ y $\overline{F(\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C))}$ compacto de E (en particular C_∞ lo cumple). (Diremos que un convexo en estas condiciones es *F-admisible*). Si $r:E\longrightarrow C$ es una retracción continua y $\tilde{R}:\mathbb{R}^k\times E\longrightarrow\mathbb{R}^k\times C$, $(\alpha,x)\longmapsto(\alpha,r(x))$, se tiene que $d(f,\Omega) = d(p_2-F\circ\tilde{R},\tilde{R}^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$ donde este último grado es el definido en II.1.

Demostración.

Tenemos que $d(f,\Omega)$ es por definición $d(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$, donde $R:\mathbb{R}^k\times E\longrightarrow\mathbb{R}^k\times C_\infty$ es la retracción construida según B). Como $(p_2-F\circ R)^{-1}(0) = (p_2-F\circ\tilde{R})^{-1}(0) = f^{-1}(0)\subset C_\infty$, por la propiedad de escisión, se verifica que

$d(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega) = d(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\tilde{R}^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$ y

$d(p_2-F\circ\tilde{R},\tilde{R}^{-1}(\Omega)\cap\Omega) = d(p_2-F\circ\tilde{R},R^{-1}(\Omega)\cap\tilde{R}^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$.

Denotemos por $\Omega_1=R^{-1}(\Omega)\cap\tilde{R}^{-1}(\Omega)\cap\Omega$. Es preciso demostrar que

$d(p_2-F\circ R,\Omega_1) = d(p_2-F\circ\tilde{R},\Omega_1)$. Para ello tomamos $H:\bar{\Omega}_1\times I\longrightarrow E$ definida por $H((\alpha,x),t)=t(F\circ R)(\alpha,x)+(1-t)(F\circ\tilde{R})(\alpha,x)$. Se verifica que H es compacta. $(p_2-H)(\partial\Omega_1\times I)\subset E\setminus\{0\}$ dado que $(p_2-H)^{-1}(0)\subset\mathbb{R}^k\times C_\infty$ y entonces $(p_2-H)^{-1}(0)=(p_2-F)^{-1}(0)\times I\subset\Omega_1\times I$.

La homotopía $p_2-H:(\bar{\Omega}_1\times I,\partial\Omega_1\times I)\longrightarrow(E,E\setminus\{0\})$ demuestra lo que se pretendía, por II.1.10 3).■

Lema II.2.6

Si $H:\bar{\Omega}\times I\longrightarrow E$ es una aplicación continua con $H(\bar{\Omega}\times I)$ acotado en E, tal que $(p_2-H)(\partial\Omega\times I)\subset E\setminus\{0\}$ y existe $k<1$ tal que para cada $B\subset\bar{\Omega}$, acotado, $\gamma(H(B\times I))\le k\gamma(B)$, se tiene que $d(p_2-H_t,\Omega)$ es constante con t recorriendo $[0,1]$.

Demostración.

Sean $C_0=\overline{\mathrm{Conv}}(H(\bar{\Omega}\times I))$ y $C_{n+1}=\overline{\mathrm{Conv}}(H((\bar{\Omega}\cap(\mathbb{R}^k\times C_n))\times I))$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Se verifica que $C_{n+1}\subset C_n$ para cada $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y como en **A)** $C_\infty(H)=\cap_n C_n$ es convexo y compacto. Sea $r:E\longrightarrow C_\infty(H)$ una retracción continua y $R:\mathbb{R}^k\times E\longrightarrow\mathbb{R}^k\times C_\infty(H)$, $(\alpha,x)\longmapsto(\alpha,r(x))$. Observemos que $C_\infty(H)$ es H_t admisible para cada $t\in I$ y por II.2.5 se tiene que $d(p_2-H_t,\Omega) = d(p_2-H_t\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$ para todo $t\in I$.

Por otro lado, $(p_2-H_t\circ R)(\alpha,x)=0$ quiere decir que $x=H(R(\alpha,x),t)$ y como $H(((\mathbb{R}^k\times C_\infty(H))\cap\bar{\Omega})\times I)\subset C_\infty(H)$ y $R(\alpha,x)\in\mathbb{R}^k\times C_\infty(H)$ se deduce que $x\in C_\infty(H)$ y $R(\alpha,x)=(\alpha,x)$. Así, $(p_2-H)((\alpha,x),t)=0$ implica que $(\alpha,x)\in(R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)\times I$, de donde obtenemos, por II.1.10 3) que $d(p_2-H_t\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$ es constante.■

Lema II.2.7

Sean $\bar{\Omega}\subset R^k xE$ como hasta ahora, $F:\bar{\Omega}\longrightarrow E$ una aplicación continua con $F\in\mathcal{S}\mathcal{C}_\gamma(\bar{\Omega})$ con $F(\bar{\Omega})$ acotado en E y $f=p_2-F$ verificando $f(\bar{\Omega}\setminus(U_1\cup U_2))\subset E\setminus\{0\}$, donde U_1 y U_2 son abiertos disjuntos de Ω. Se verifica que $d(f,\Omega) = d(f|_{\bar{U}_1},U_1)+d(f|_{\bar{U}_2},U_2)$.

Demostración

$d(f,\Omega)$ está definido por $d(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)$ según la construcción hecha en A) y B). Por II.1.10 2) se tiene que $d(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)=d(p_2-F\circ R|_{\overline{R^{-1}(U_1\cup U_2)\cap(U_1\cup U_2)}},R^{-1}(U_1\cup U_2)\cap(U_1\cup U_2))$.

Como $(p_2-F\circ R)^{-1}(0)\subset(R^{-1}(U_1)\cap U_1)\cup(R^{-1}(U_2)\cap U_2)$, por II.1.10 3)

$$d(p_2-F\circ R,R^{-1}(\Omega)\cap\Omega) =$$

$$= d(p_2-F\circ R|_{\overline{R^{-1}(U_1)\cap U_1}},R^{-1}(U_1)\cap U_1)+d(p_2-F\circ R|_{\overline{R^{-1}(U_2)\cap U_2}},R^{-1}(U_2)\cap U_2)$$

y del hecho de que C_∞ es admisible para $F|_{\bar{U}_1}$ y $F|_{\bar{U}_2}$ se deduce el resultado.∎

C) Finalmente consideremos $F\in\mathcal{C}_\gamma(\bar{\Omega})$ con $F(\bar{\Omega})$ acotado en E y $f=p_2-F$ no se anula en $\partial\Omega$. Sean $r=dist(f(\partial\Omega),0)>0$ y $M=Sup\{\|F(z)\|:z\in\bar{\Omega}\}$. Consideremos $k\in[0,1)$ tal que $(1-k)M<r$. Se verifica que $kF\in\mathcal{S}\mathcal{C}_\gamma(\bar{\Omega})$ pues $\gamma(kF(B))=k\gamma(F(B))<k\gamma(B)$.

Por otro lado, $(p_2-kF)(\alpha,x)=x-kF(\alpha,x)$, $\|(p_2-kF)(\alpha,x)-(p_2-F)(\alpha,x)\| = (1-k)\|F(\alpha,x)\|<r$, por tanto $(p_2-kF)(\partial\Omega)\subset E\setminus\{0\}$ y está definido $d(p_2-kF,\Omega)$ según la construcción hecha en A) y B). Se define $d(f,\Omega) = d(p_2-kF,\Omega)$.

Consistencia de la definición.

Sean $k,k'\in[0,1)$ tales que $(1-k)M<r$ y $(1-k')M<r$. Supongamos que $k<k'$ y sea $G((\alpha,x),t)=(tk+(1-t)k')F(\alpha,x)$. Entonces, para todo

$(\alpha,x)\in\bar{\Omega}$, $\|(p_2-F)(\alpha,x)-(p_2-G_t)(\alpha,x)\|=(1-tk-(1-t)k')\|F(\alpha,x)\|<r$. Por tanto $(p_2-G)(\partial\Omega\times I)\subset E\setminus\{0\}$, además como $\gamma(G(B\times I))\le k'\gamma(B)$ el Lema II.2.6 implica que $d(p_2-kF,\Omega) = d(p_2-k'F,\Omega)$. ∎

Proposición II.2.8

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^k\times E$, con $p_1(\bar{\Omega})$ acotado en $\mathbb{R}^k$, $F\in\mathcal{C}_\gamma(\bar{\Omega})$ tal que $F(\bar{\Omega})$ es acotado en E y $f=p_2-F$ con $f(\partial\Omega)\subset E\setminus\{0\}$. El grado definido anteriormente $d(p_2-F,\Omega)\in\Pi_k$ verifica las siguientes propiedades:

a) Si $V\subset\Omega$ es un abierto y $f(\bar{\Omega}\setminus V)\subset E\setminus\{0\}$, se tiene que $d(f,\Omega) = d(f|_{\bar{V}},V)$.

b) Si U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y $f(\bar{\Omega}\setminus(U_1\cup U_2))\subset E\setminus\{0\}$, se tiene que $d(f,\Omega) = d(f|_{\bar{U}_1},U_1)+d(f|_{\bar{U}_2},U_2)$.

c) Sea $H:\bar{\Omega}\times I\longrightarrow E$ una aplicación continua con $H(\bar{\Omega}\times I)$ acotado en E, $(p_2-H)(\partial\Omega\times I)\subset E\setminus\{0\}$ y $\gamma(H(B\times I))<\gamma(B)$ si $\gamma(B)>0$ para cada $B\subset\Omega$ acotado. Se verifica que $d(p_2-H_t,\Omega)$ es constante al variar $t\in[0,1]$.

Demostración

a) Sean $M'=\mathrm{dist}(f(\bar{\Omega}\setminus V),0)$, $M=\mathrm{Sup}\{\|F(x)\|:x\in\bar{\Omega}\}\ge\mathrm{Sup}\{\|F(x)\|:x\in\bar{V}\}$, $r=\mathrm{dist}(f(\partial\Omega),0)$ y $r'=\mathrm{dist}(f(\partial V),0)$, $(M'\le r$ y $M'\le r')$.

Si $k\in[0,1)$ y $(1-k)M<M'$, se tiene que $d(f,\Omega) = d(p_2-kF,\Omega)$ y $d(f,V) = d(p_2-kF|_{\bar{V}},V)$. Como $\|f(\alpha,x)-(p_2-kF)(\alpha,x)\|=(1-k)\|F(\alpha,x)\|<M'$ es claro que $(p_2-kF)(\bar{\Omega}\setminus V)\subset E\setminus\{0\}$ y por II.2.7 $d(f,\Omega) = d(f|_{\bar{V}},V)$.

b) Por *a*) $d(f,\Omega) = d(f|_{\overline{(U_1\cup U_2)}},(U_1\cup U_2))$, también por *a*) se puede suponer que $\bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\emptyset$.

Si llamamos $M=\mathrm{Sup}\{\|F(x)\|:x\in\overline{(U_1\cup U_2)}\}$, $M_1=\mathrm{Sup}\{\|F(x)\|:x\in\bar{U}_1\}$, $M_2=\mathrm{Sup}\{\|F(x)\|:x\in\bar{U}_2\}$, $r=\mathrm{dist}(f(\partial(U_1\cup U_2)),0)$, $r_1=\mathrm{dist}(f(\partial U_1),0)$ y

$r_2=\mathrm{dist}(f(\partial U_2),0)$ se verifica que $M_1\leq M$, $M_2\leq M$, $r\leq r_1$ y $r\leq r_2$ y por tanto, si $k\in[0,1)$ es tal que $(1-k)M<r$ también son $(1-k)M_1<r_1$ y $(1-k)M_2<r_2$ y como consecuencia

$\mathrm{d}(f|_{\overline{(U_1\cup U_2)}},(U_1\cup U_2)) = \mathrm{d}(p_2-kF|_{\overline{(U_1\cup U_2)}},(U_1\cup U_2))$,

$\mathrm{d}(f|_{\overline{U}_1},U_1) = \mathrm{d}(p_2-kF|_{\overline{U}_1},U_1)$ y $\mathrm{d}(f|_{\overline{U}_2},U_2) = \mathrm{d}(p_2-kF|_{\overline{U}_2},U_2)$. Ahora II.2.7 concluye la demostración.

c) Consideremos $r=\mathrm{dist}((p_2-H)(\partial\Omega\times I),0)$ y $M=\mathrm{Sup}\{\|H((\alpha,x),t)\|:((\alpha,x),t)\in\overline{\Omega}\times I\}$ y $k\in[0,1)$ tal que $(1-k)M<r$. Es evidente que $\mathrm{d}(p_2-H_t,\Omega) = \mathrm{d}(p_2-kH_t,\Omega)$ y como este último, en virtud de II.2.6, es constante se termina la demostración.∎

Aún generalizaciones a clases mas amplias de aplicaciones, podrían ser construidas, por caminos análogos a los seguidos para las diversas generalizaciones del grado de Leray-Schauder, como pueden ser el grado en espacios localmente convexos de aplicaciones que son perturbaciones compactas de la proyección p_2, etc., pero hemos creido conveniente centrarnos en las dos construcciones anteriores que consideramos más importantes y en las que se observa que el camino seguido es completamente natural, los conceptos y demostraciones son las extensiones naturales de las que se realizan en el grado de Leray-Schauder, lo que nos conduce a la conclusión de que el grado generalizado es una buena extensión del grado topológico de Brouwer.

CAPITULO III

GRADO GENERALIZADO EN VARIEDADES E INVARIANTE DE HOPF GENERALIZADO

El concepto de k-variedad normalmente referenciada de R^{n+k} definido en 0.6, se puede extender, de forma natural, sustituyendo R^{n+k} por una variedad riemanniana (M^{n+k},g), con o sin borde. Para estudiar variedades no compactas, se elimina la condición de compacidad en las variedades normalmente referenciadas y se sutituye por la condición de ser cerradas en M^{n+k}. Las k-variedades normalmente referenciadas de M^{n+k} se clasifican por homologías realizadas por variedades cerradas de $M^{n+k}\times I$ y se obtienen los conjuntos $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$. En el primer párrafo de este capítulo se establece una aplicación biyectiva Π^k_n entre $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ y el conjunto de clases de homotopía $[M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]$, y se realiza un estudio sistemático de las relaciones existentes entre los conjuntos $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ y los conjuntos de cohomotopía $[M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]$. En particular, se verá que se $n\geq k+2$, $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ tiene estructura de grupo abeliano, determinado por la suma de variedades.

En el párrafo 2, se define el grado de aplicaciones continuas entre variedades de dimensiones distintas y sin borde, $f:M^{n+k}\longrightarrow M^n$, como un elemento de $\mathfrak{F}^k(M^{n+k})$ y en el párrafo 3 se analiza en qué condiciones este grado se puede considerar como un elemento de un grupo de homotopía.

Si M^{n+k} es una π-variedad, es decir, se puede sumergir en

$\mathbb{R}^{n+k+s}$ con fibrado normal trivializable para algún $s\geq 0$, se pueden definir aplicaciones entre $\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ y $\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$ y en virtud de la biyección Π_n^k, también entre $[M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]$ y $\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$. En ciertas condiciones estas aplicaciones son epimorfismos, hecho que será de gran importancia para el estudio de la G-complementación en el capítulo IV y para la interpretación del grado generalizado de aplicaciones continuas entre variedades cuando $\partial M^{n+k}=\emptyset$ y M^{n+k} es k-conexa. El grado que se construye extiende al presentado en la introducción (0.5) y se obtendrán generalizaciones de los teoremas 0.5.7 y 0.6.20. Como veremos, el marco mas propicio para el estudio del grado generalizado es aquel en que M^{n+k} sea una π-variedad sin borde, k-conexa y orientable, aunque en situaciones particulares mas débiles también se obtienen óptimos resultados. Se establecerán además, resultados acerca de los grupos de cohomotopía de las variedades consideradas.

Se termina el capítulo resolviendo parcialmente una cuestión planteada por G.W.Whitehead en [35] (pag.192).

III.1. VARIEDADES NORMALMENTE REFERENCIADAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS.

En este párrafo, (M^{n+k},g) denotará una variedad riemanniana de clase C^{∞}, T_2, cumpliendo el II.A.N. y de dimensión $n+k$.

El concepto de variedad normalmente referenciada de $\mathbb{R}^{n+k}$ definido en 0.6, así como la clasificación de éstas por homología, se pueden extender a M^{n+k} de dos formas distintas que pasamos analizar.

Definición III.1.1

Un par (M^k,F) es una k-subvariedad normalmente referenciada de (M^{n+k},g) si M^k es una subvariedad cerrada de dimensión k, de M^{n+k}, sin borde y contenida en $\mathrm{Int}(M^{n+k})$, y $F=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ es una familia de secciones linealmente independientes de clase C^{∞} de $\nu(M^k)$, donde $\nu(M^k)$ es el espacio fibrado normal de M^k en (M^{n+k},g) construido en 0.3.20.

Observamos que si (M^k,F) es una subvariedad normalmente referenciada de (M^{n+k},g), se verifica que el espacio fibrado normal de M^k en M^{n+k}, $\nu(M^k)$, es trivializable por el M^k-isomorfismo de clase C^{∞} $\psi_F: M^k\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \nu(M^k)$ definido por

$$\psi_F(x,(y_1,y_2,\dots,y_n)) = (x, \sum_{i=1}^{n} y_i u_i(x)).$$

Consideremos los siguientes conjuntos:

$S.N.R.(M^{n+k},g) = \{(M^k,F)\colon (M^k,F)$ es k-subvariedad normalmente referenciada de $(M^{n+k},g)\}$ y

$S.N.R._c(M^{n+k},g) = \{(M^k,g)\colon (M^k,g) \in S.N.R.(M^{n+k},g)$ y M^k es compacta}.

Evidentemente si M^{n+k} es compacta se tiene que $S.N.R.(M^{n+k},g)$ y $S.N.R._c(M^{n+k},g)$ coinciden.

Proposición III.1.2

a) En $S.N.R.(M^{n+k},g)$ se considera la relación binaria, $\simeq$, definida por: $(M_0^k,F_0)\simeq(M_1^k,F_1)$ si y solamente si existe M^{k+1} subvariedad de dimensión $k+1$ de $\mathrm{Int}(M^{n+k})\times I$, cerrada en $M^{n+k}\times I$ y tal que $\partial M^{k+1} = (M_0^k\times\{0\})\cup(M_1^k\times\{1\})$, $M^{k+1}\cap(M^{n+k}\times\{t\}) = M_0^k\times\{t\}$ para todo $t\in[0,1/3)$, $M^{k+1}\cap(M^{n+k}\times\{t\}) = M_1^k\times\{t\}$ para todo $t\in(2/3,1]$ y existe $G=\{G_1,G_2,\dots,G_n\}$ familia de secciones linealmente independientes de clase C^∞ de $\nu(M^{k+1})$ (en $M^{n+k}\times I$ se considera la métrica riemanniana producto de g por la usual de I) tal que $G|_{M_0^k\times\{0\}}=F_0$ y $G|_{M_1^k\times\{1\}}=F_1$. Observamos que si $x\in M_0^k$ (respect. $x\in M_1^k$) y N_x es el espacio normal en x a M_0^k (respect. a M_1^k) y $N_{(x,0)}$ (respect. $N_{(x,1)}$) es el espacio normal en $(x,0)$ (respect.en $(x,1)$) a M^{k+1}, se verifica que $N_x=N_{(x,0)}$ (respect. $N_x=N_{(x,1)}$). (M_0^k se identifica con $M_0^k\times\{0\}$ y $M_1^k\times\{1\}$). Entonces $\simeq$ es una relación de equivalencia en $S.N.R.(M^{n+k},g)$.

Si $(M_0^k,F_0)\simeq(M_1^k,F_1)$, se dice que (M_0^k,F_0) y (M_1^k,F_1) son *homólogas* o *normalmente cobordantes*.

b) En $S.N.R._c(M^{n+k},g)$ se considera la relación binaria, $\simeq_c$, definida por: $(M_0^k,F_0)\simeq_c(M_1^k,F_1)$ si y solamente si existe M^{k+1} subvariedad de dimensión $k+1$ de $\mathrm{Int}(M^{n+k})\times I$, compacta en $M^{n+k}\times I$ y tal que $\partial M^{k+1} = (M_0^k\times\{0\})\cup(M_1^k\times\{1\})$, $M^{k+1}\cap(M^{n+k}\times\{t\}) = M_0^k\times\{t\}$ para todo $t\in[0,1/3)$, $M^{k+1}\cap(M^{n+k}\times\{t\}) = M_1^k\times\{t\}$ para todo $t\in(2/3,1]$ y existe $G=\{G_1,G_2,\dots,G_n\}$ familia de secciones linealmente independientes de clase C^∞ de $\nu(M^{k+1})$ tal que $G|_{M_0^k\times\{0\}}=F_0$ y $G|_{M_1^k\times\{1\}}=F_1$.

Entonces, $\approx_c$ es una relación de equivalencia en $S.N.R._c(M^{n+k},g)$.

D/ La demostración es elemental y por tanto se omite.∎

Notación

A los conjuntos cocientes $S.N.R.(M^{n+k},g)/\approx$ y $S.N.R._c(M^{n+k},g)/\approx_c$ se les designará respectivamente por $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$ y $\mathfrak{F}_c^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$. Es evidente que si M^{n+k} es compacta, se verifica que $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g) = \mathfrak{F}_c^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$.

En el caso en que M^{n+k} no sea compacta, se tiene:

Proposición III.1.3

La correspondencia $\Gamma:\mathfrak{F}_c^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)\longrightarrow\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$ definida por $\Gamma([(M^k,F)]_c) = [(M^k,F)]$ es una aplicación.

Mas adelante se probará que, en general, Γ no es una aplicación inyectiva. (Vease el ejemplo III.1.9).

A continuación, vamos a enunciar y demostrar una serie de resultados que nos conducirán a la definición de una aplicación $\Pi_n^k:[M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]\longrightarrow\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$ y a la verificación de su biyectividad.

Proposición III.1.4

a) Si $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ es una aplicación continua, se verifica que existe $h:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ aplicación de clase C^∞ con $p\in(\text{v.r.})(h)$ y homótopa a f por una homotopía continua $H:(M^{n+k}\times I,\partial M^{n+k}\times I)\longrightarrow(S^n,q)$.

b) Si $f,h:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ son aplicaciones de clase C^∞ con $p\in(\text{v.r.})(f)\cap(\text{v.r.})(h)$ y homótopas por una homotopía continua $G:(M^{n+k}\times I,\partial M^{n+k}\times I)\longrightarrow(S^n,q)$, se tiene que también son homótopas por una homotopía de clase C^∞, $H:(M^{n+k}\times I,\partial M^{n+k}\times I)\longrightarrow(S^n,q)$, con $p\in(\text{v.r.})(H)$.

Demostración

a) Sean $V=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:\ 1/2<\|x\|<3/2\}$, V es un entorno abierto de S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$, y $r:\bar{V}\longrightarrow S^n$ la retracción de clase C^∞ definida por $r(x)=\frac{x}{\|x\|}$. Al ser $\bar{V}$ compacto y r continua, se tiene que r es uniformemente continua y por tanto para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta_\varepsilon>0$ con $0<\delta_\varepsilon<\varepsilon$ tal que si $\|x-y\|<\delta_\varepsilon$ se verifica que $\|r(x)-r(y)\|<\varepsilon$.

Por otra parte, para cada $\varepsilon>0$ existe $g_\varepsilon:M^{n+k}\longrightarrow S^n$ aplicación de clase C^∞, con $p\in(\text{v.r.})(g_\varepsilon)$ y $\|g_\varepsilon(x)-f(x)\|<\varepsilon$ para todo $x\in M^{n+k}$ (vease el corolario IX.1.6 de [23]).

Tomemos $\varepsilon=1$. Asociado a $\varepsilon=1$ tenemos δ_1 y $g_\delta:M^{n+k}\longrightarrow S^n$ aplicación de clase C^∞ con $\delta<\delta_1/2$. Como $\mathcal{U}=\{\text{Int}(M^{n+k}),\ f^{-1}(B_\delta(q))\}$ es un recubrimiento abierto de M^{n+k}, existe $\{\lambda_1,\ \lambda_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{U}$. Definimos $\bar{h}:M^{n+k}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ por $\bar{h}(x)=\lambda_1(x)g_\delta(x)+\lambda_2(x)q$. Claramente $\bar{h}$ es de clase C^∞ y $\|\bar{h}(x)-f(x)\|<\delta<1/2$ para todo $x\in M^{n+k}$, y por tanto $\bar{h}(x)\in V$ para cada $x\in M^{n+k}$. Sea $h:M^{n+k}\longrightarrow S^n$ la aplicación definida por $h(x)=(r\circ\bar{h})(x)$. Se tiene que h es de clase C^∞ y si $x\in\partial M^{n+k}$, $\lambda_1(x)=0$ y así $h(x)=q$. Si $x\in f^{-1}(\bar{B}_\delta(q))$, como $\|h(x)-f(x)\|<1$ se tiene que $\|h(x)-q\|<2$ y por tanto $h(x)\neq p$. De esta manera se comprueba que

$h^{-1}(p)\subset M^{n+k}\setminus f^{-1}(\bar{B}_\delta(q))$ y como $h|_{M^{n+k}\setminus f^{-1}(\bar{B}_\delta(q))}=g_\delta|_{M^{n+k}\setminus f^{-1}(\bar{B}_\delta(q))}$ y $p\in(\text{v.r.})(g_\delta)$ obtenemos que $p\in(\text{v.r.})(h)$.

Además, de $\|h(x)-f(x)\|<1$ para cada $x\in M^{n+k}$ se deduce que $f(x)\neq -h(x)$ para todo $x\in M^{n+k}$ y así la aplicación $H:(M^{n+k}\times I,\partial M^{n+k}\times I)\longrightarrow(S^n,q)$ definida por $H(x,t)=\dfrac{tf(x)-(1-t)h(x)}{\|tf(x)-(1-t)h(x)\|}$ es continua, $H_0=h$ y $H_1=f$.

b) Sean V y $r:\bar{V}\longrightarrow S^n$ como en *a*).

Sea $\chi:M^{n+k}\times I\longrightarrow S^n$ aplicación de clase C^∞ con $p\in(\text{v.r.})(\chi)$ y $\|\chi(x,t)-G(x,t)\|<\dfrac{\delta_{1/2}}{2}=\delta$ para todo $(x,t)\in M^{n+k}\times I$. Como $\mathcal{U}=\{\operatorname{Int}(M^{n+k})\times I,\ G^{-1}(B_\delta(q))\}$ es un recubrimiento abierto de $M^{n+k}\times I$, existe $\{\lambda_1,\ \lambda_2\}$ partición de la unidad, de clase C^∞, subordinada a $\mathcal{U}$ y definamos $L:M^{n+k}\times I\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ por $L(x,t)=\lambda_1(x,t)\chi(x,t)+\lambda_2(x,t)q$. La aplicación L es de clase C^∞ y como $\|L(x,t)-G(x,t)\|<\delta<1/4$, $H'=r\circ L=\dfrac{L}{\|L\|}$ está bien definida, es de clase C^∞ y $H'(\partial M^{n+k}\times I)=q$. Si $(x,t)\in G^{-1}(\bar{B}_\delta(q))$, como $\|H'(x,t)-G(x,t)\|<1/2$, se deduce que $\|H'(x,t)-q\|<1$ y por tanto $H'(x,t)\neq p$. Así, $H'^{-1}(p)\subset M^{n+k}\times I\setminus G^{-1}(\bar{B}_\delta(q))$ y como en este subconjunto abierto H' y χ coinciden y $p\in(\text{v.r.})(\chi)$, también se tiene que $p\in(\text{v.r.})(H')$.

Finalmente, tomemos $\mathcal{V}=\{M^{n+k}\times(0,1),M^{n+k}\times[0,1/3)\cup M^{n+k}\times(2/3,1]\}$ recubrimiento abierto de $M^{n+k}\times I$, $\{\mu_1,\ \mu_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{V}$, $\alpha:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ aplicación de clase C^∞ con $\alpha|_{[0,1/3)}=0$, $\alpha|_{(2/3,1]}=1$ y $\alpha'(t)>0$ para cada $t\in(1/3,2/3)$ y definamos $H(x,t)=\dfrac{\mu_1(x,t)H'(x,\alpha(t))+\mu_2(x,t)G(x,\alpha(t))}{\|\mu_1(x,t)H'(x,\alpha(t))+\mu_2(x,t)G(x,\alpha(t))\|}$. Se tiene que $H:(M^{n+k}\times I,\partial M^{n+k}\times I)\longrightarrow(S^n,q)$ es de clase C^∞, $H_0=f$, $H_1=h$ y $p\in(\text{v.r.})(H)$ con lo que se concluye la demostración.∎

Consideremos ahora $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ aplicación de clase C^∞ con $p\in(\mathrm{v.r.})(f)$, a f se le puede asociar un elemento (M_f^k,F_f) de $S.N.R.(M^{n+k},g)$, donde $M_f^k=f^{-1}(p)\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$ y $F_f=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ familia de secciones de clase C^∞ del fibrado normal $\nu(M^k)$, de manera que si $c'=(U,\varphi_n^{-1},R^n)$ es la carta de S^n, dada por la proyección estereográfica, $p\in U=S^n\setminus\{q\}\xrightarrow{\varphi_n^{-1}}R^n$, se tiene $T_xf(u_j(x))=\theta_{c'}^p(e_j)$ para todo $j=1,\dots,n$ y todo $x\in M^k$. (Vease 0.3.21).

Lema III.1.5

Sea $H:(M^{n+k}\mathrm{x}I,\partial M^{n+k}\mathrm{x}I)\longrightarrow(S^n,q)$ una aplicación de clase C^∞ tal que $p\in(\mathrm{v.r.})(H)\cap(\mathrm{v.r.})(H_0)\cap(\mathrm{v.r.})(H_1)$. Entonces, $(H_0^{-1}(p),F_{H_0})$ y $(H_1^{-1}(p),F_{H_1})$ son homólogas.

Demostración

Consideremos $\alpha:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ aplicación de clase C^∞ con $\alpha|_{[0,1/3)}=0$, $\alpha|_{(2/3,1]}=1$ y $\alpha'(t)>0$ para cada $t\in(1/3,2/3)$.

Definimos $H':(M^{n+k}\mathrm{x}I,\partial M^{n+k}\mathrm{x}I)\longrightarrow(S^n,q)$ por $H'(x,t)=H(x,\alpha(t))$. Es claro que p es valor regular de H', H_0' y H_1'. Por comodidad, volvemos a denotar a H' por H.

Como $p\in(\mathrm{v.r.})(H)\cap(\mathrm{v.r.})(H_0)\cap(\mathrm{v.r.})(H_1)$ se tiene que $H^{-1}(p)$ es una subvariedad de $\mathrm{Int}(M^{n+k})\mathrm{x}I$ cerrada en $M^{n+k}\mathrm{x}I$, con $\partial H^{-1}(p)=(H_0^{-1}(p)\mathrm{x}\{0\})\cup(H_1^{-1}(p)\mathrm{x}\{1\})$ y además

$H^{-1}(p)\cap(M^{n+k}\mathrm{x}\{t\})=H_0^{-1}(p)\mathrm{x}\{t\}$ para todo $t\in[0,1/3)$ y

$H^{-1}(p)\cap(M^{n+k}\mathrm{x}\{t\})=H_1^{-1}(p)\mathrm{x}\{t\}$ para todo $t\in(2/3,1]$.

Sea $F_H=\{F_H^1,F_H^2,\dots,F_H^n\}$ familia de secciones de clase C^∞ del fibrado normal de $H^{-1}(p)$ verificando $T_{(x,t)}H(F_H^j(x,t))=\Theta_{c'}^p(e_j)$ para cada $j\in\{1,2,\dots,n\}$ y $(x,t)\in H^{-1}(p)$.

Si $N_{(x,t)}$ es el espacio normal en (x,t) a $H^{-1}(p)$ en $M^{n+k}xI$, $N_{x_0}^o$ es el espacio normal en x_0 a $H_0^{-1}(p)$ en M^{n+k} y $N_{x_1}^1$ es el espacio normal en x_1 a $H_1^{-1}(p)$ en M^{n+k}, es claro que $N_{(x_0,0)}=N_{x_0}^0$ y $N_{(x_1,1)}=N_{x_1}^1$. Supongamos que $F_{H_0}=\{v_1,\dots,v_n\}$ y $F_{H_1}=\{w_1,\dots,w_n\}$ son las referencias normales asociadas a $H_0^{-1}(p)$ y $H_1^{-1}(p)$ respectivamente.

Si $x\in H_0^{-1}(p)$, se verifica que $T_{(x,0)}H\colon T_xM^{n+k}xT_0I\longrightarrow T_pS^n$

$$(v_1,v_2)\longmapsto T_xH_0(v_1)$$

y $T_{(x,0)}H^{-1}(p)\equiv T_xH_0^{-1}(p)xT_0I$. Como $T_{(x,0)}H$ se anula en $T_{(x,0)}H^{-1}(p)$ y $T_xH_0(v_j(x))=\Theta_{c'}^p(e_j)$ se tiene que $F_H|_{H_0^{-1}(p)x\{0\}}=F_{H_0}$. Análogamente se prueba que $F_H|_{H_1^{-1}(p)x\{0\}}=F_{H_1}$. ∎

Lema III.1.6

Para cada variedad normalmente referenciada (M^k,F) de M^{n+k}, existe $f\colon(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ aplicación de clase C^∞ tal que $p\in(\text{v.r.})(f)$ y $(f^{-1}(p),F_f)=(M^k,F)$.

Demostración

Supongamos que $F=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ y que $\nu(M^k)$ es el fibrado normal de M^k en M^{n+k}.

Se considera el M^k-isomorfismo de clase C^∞, $\psi_F\colon M^kxR^n\longrightarrow\nu(M^k)$ definido por

$\psi_F(x,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = (x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x))$. Entonces, $t_1=(M^k,\psi_F,\mathbb{R}^n)$ es una carta global de $\nu(M^k)$.

Consideremos D, entorno abierto de la sección cero de $\nu(M^k)$ y $exp\colon D\longrightarrow U$ el difeomorfismo definido en 0.4, donde U es un entorno abierto de M^k contenido en $\mathrm{Int}(M^{n+k})$. Definimos $L\colon U\longrightarrow S^n\setminus\{q\}$ como la siguiente composición de aplicaciones de clase C^∞:

$$L\colon U\xrightarrow{exp^{-1}}D\xrightarrow{\psi_F^{-1}}M^k\times\mathbb{R}^n\xrightarrow{p_2}\mathbb{R}^n\xrightarrow{\varphi_n}S^n\setminus\{q\}.$$

Es claro que $L^{-1}(p)=M^k$. Tomamos ahora W, entorno abierto de M^k en M^{n+k} tal que $M^k\subset W\subset\overline{W}\subset U$, por tanto $\mathcal{U}=\{U,\ M^{n+k}\setminus\overline{W}\}$ es un recubrimiento abierto de M^{n+k}. Sea $\{\lambda_1,\ \lambda_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{U}$. Consideramos $f\colon(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ aplicación de clase C^∞ definida por $f(x)=\dfrac{\lambda_1(x)L(x)+\lambda_2(x)q}{\|\lambda_1(x)L(x)+\lambda_2(x)q\|}$, (observemos que para cada $x\in U\setminus\overline{W}$, $L(x)$ y q nunca son antipodales). Es fácil comprobar que $f^{-1}(p)=M^k$. Como $f^{-1}(p)\subset W$ y $f|_W=L|_W$ para hallar la referencia normal F_f basta hallar F_L.

Sea $x\in M^k$ y $c=(V,\psi,\mathbb{R}^{n+k})$ carta adaptable de M^{n+k} a M^k, con $x\in V\subset W$, mediante $\mathbb{R}^k$, y sea $c_1=(V\cap M^k,\psi|_{V\cap M^k}=\overline{\psi},\mathbb{R}^k)$ la correspondiente carta de M^k. Hay que demostrar que $T_xL(u_j(x))=\theta^p_{c'}(e_j)$ para cada $j\in\{1,\dots,n\}$ y cada $x\in M^k$, lo que equivale a probar que $D(\varphi_n^{-1}\circ L\circ\psi^{-1})(\psi(x))((\theta_c^x)^{-1}(u_j(x)))=e_j$.

Para ello, previamente consideramos la aplicación $\alpha\colon\pi^{-1}(V\cap M^k)\longrightarrow\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(y,v)=(\overline{\psi}(y),t_{1_y}^{-1}(v))$, donde $\pi\colon\nu(M^k)\longrightarrow M^k$ es la proyección, la cual determina la carta $(\pi^{-1}(V\cap M^k),\alpha,\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n)$ de $\nu(M^k)$ en $(x,0)$.

Entonces, $D(\varphi_n^{-1}\circ L\circ\psi^{-1})(\psi(x))((\theta_c^x)^{-1}(u_j(x)))$ =

$= D(p_2\circ\psi_F^{-1}\circ\alpha^{-1}\circ\alpha\circ(exp)^{-1}\circ\psi^{-1})(\psi(x))((\Theta_C^X)^{-1}(u_j(x)))$ y como $u_j(x)=t_{1_x}(e_j)$, de 0.4 se deduce que

$$D(p_2\circ\psi_F^{-1}\circ\alpha^{-1}\circ\alpha\circ(exp)^{-1}\circ\psi^{-1})(\psi(x))((\Theta_C^X)^{-1}(u_j(x))) =$$

$$= D(p_2\circ\psi_F^{-1}\circ\alpha^{-1})(\bar{\psi}(x),0)\circ D(\alpha\circ(exp)^{-1}\circ\psi^{-1})(\psi(x)((\Theta_C^X)^{-1}(t_{1_x}(e_j)) =$$

$$= D(p_2\circ\psi_F^{-1}\circ\alpha^{-1})(\bar{\psi}(x),0)(0,e_j) = p_2(0,e_j) = e_j. \blacksquare$$

Lema III.1.7

Sean $f,h:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ aplicaciones de clase C^∞ con $p\in(\text{v.r.})(f)\cap(\text{v.r.})(h)$ y tales que $(f^{-1}(p),F_f)$ y $(h^{-1}(p),F_h)$ son homólogas. Entonces, f y h son homótopas.

Demostración

a) En primer lugar vamos a demostrar que si $(f^{-1}(p),F_f) = (h^{-1}(p),F_h)$ se tiene que f y h son homótopas. Para ello denotemos a $f^{-1}(p)=h^{-1}(p)$ por M^k y a $F_f=F_h$ por F y consideremos $\tilde{h}:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ la aplicación de clase C^∞ construida en el lema anterior, tal que $(\tilde{h}^{-1}(p),F_{\tilde{h}}) = (M^k,F_h)$.

Vamos a probar que f y $\tilde{h}$ son homótopas y de la misma forma se demostraría que h y $\tilde{h}$ son homótopas concluyéndose que f y h son homótopas.

Existe U, entorno tubular de M^k, contenido en $\text{Int}(M^{n+k})$, tal que $f(U)\subset S^n\setminus\{q\}$ y $\tilde{h}(U)\subset S^n\setminus\{q\}$ y además $\tilde{h}|_U$ se puede factorizar como sigue:

$$\tilde{h}|_U: U\xrightarrow{exp^{-1}}D\xrightarrow{\psi_F^{-1}}M^k\times R^n\xrightarrow{p_2}R^n\xrightarrow{\varphi_n}S^n\setminus\{q\}.$$

Como $F_f=F_{\tilde{h}}$, se tiene que $T_xf=T_x\tilde{h}$ para todo $x\in M^k$. Consideramos $p_2|_{U'}:U'=\psi_F^{-1}\circ(exp)^{-1}(U)\longrightarrow R^n$ $(U'\subset M^k\times R^n)$ y $\tilde{f}:U'\longrightarrow R^n$, donde

$\tilde{f}=\varphi_n^{-1}\circ f\circ exp\circ\psi_F|_{U'}$. Del hecho de que $T_x f=T_x\tilde{h}$ para cada $x\in M^k$, se deduce que $T_{(x,0)}p_2=T_{(x,0)}\tilde{f}$ para todo $x\in M^k$.

Para cada $j\in\{1,\dots,n\}$ denotamos por $\tilde{f}_j:U'\longrightarrow\mathbb{R}$ a la j-ésima coordenada de la función $\tilde{f}$ y dado $x\in M^k$, fijo, escribimos $\tilde{f}_{x,j}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ la aplicación definida por $\tilde{f}_{x,j}(\lambda)=\tilde{f}_j(x,\lambda)$.

Para cada $x\in M^k$, existe V^x entorno abierto de x en M^k, tal que $\overline{V^x}$ es compacto. Como $V=\{V^x:x\in M^k\}$ es un recubrimiento abierto de M^k, existe un refinamiento cerrado, localmente finito, $\mathcal{C}=\{C_i:i\in I\}$ de V. En consecuencia, C_i es compacto para todo $i\in I$.

Dado $i\in I$, existe $\varepsilon_i\in\mathbb{R}^+$ tal que $C_i\times\overline{B}_{\varepsilon_i}(0)\subset U'$. Consideramos una función continua $\varepsilon:M^k\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $\varepsilon(y)<\varepsilon_i$ para cada $y\in C_i$ y cada $i\in I$. Es claro que $U''=\bigcup_{x\in M^k}\{x\}\times B_{\varepsilon(x)}(0)$ es un entorno abierto de $M^k\times\{0\}$, contenido en U'.

Sea $M_i=\max\left\{\left|\dfrac{\partial^2 f_{x,j}(\lambda)}{\partial\lambda_s\partial\lambda_k}\right| : s,j,k\in\{1,\dots,n\},\quad (x,\lambda)\in C_i\times\overline{B}_{\varepsilon_i}(0)\right\}$ y consideremos $S:M^k\longrightarrow\mathbb{R}^+$ una función continua tal que

$S(y)<\min\left\{\dfrac{1}{\binom{n}{2}M_i+1},\ \varepsilon|_{C_i}(y)\right\}$ para todo $y\in C_i$. Se tiene que

$U'''=\bigcup_{x\in M^k}\{x\}\times B_{S(x)}(0)$ es un entorno abierto de $M^k\times\{0\}$, contenido en U''.

Sea $H':U'''\times I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ la aplicación continua definida por $H'((x,\lambda),t)=tp_2(x,\lambda)+(1-t)\tilde{f}(x,\lambda)$. Si $(x,\lambda)\in U'''\setminus(M^k\times\{0\})$, se tiene que $0<\|\lambda\|<S(x)$ y $x\in C_{i_0}$ ($\|\lambda\|=\max\{|\lambda_j|:\ j=1,\dots,n\}$). Supongamos que $|\lambda_{j_0}|=\|\lambda\|$. La j-ésima coordenada de H_x' es

$$H'_{x,j_0}(\lambda,t) = \lambda_{j_0} + (1-t)\,\frac{1}{2!}\Big(\sum_{s,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_{x,j}}{\partial\lambda_s\partial\lambda_k}(\lambda_x)\,\lambda_s\lambda_k\Big).$$ Así,

$$|H'_{x,j_0}(\lambda,t)| \geq |\lambda_{j_0}| - \sum_{s,k=1}^{n} M_{i_0}|\lambda_s||\lambda_k| \geq \|\lambda\| - \binom{n}{2} M_{i_0}\|\lambda\|^2 =$$

$= \|\lambda\|\left(1-\binom{n}{2}M_{i_0}\|\lambda\|\right) >0$, puesto que $\|\lambda\|>0$ y $1-\binom{n}{2}M_{i_0}\|\lambda\| >0$ dado que $\|\lambda\|<S(x)<\dfrac{1}{\binom{n}{2}M_{i_0}+1}$ y por tanto $\|\lambda\|+\binom{n}{2}M_{i_0}\|\lambda\| <1$, en consecuencia $1-\binom{n}{2}M_{i_0}\|\lambda\| >0$.

Se concluye pues, que si denotamos am $(exp\circ\psi_F)(U'')$ por W, existe una homotopía continua $H\colon W\times I \longrightarrow S^n\setminus\{q\}$, tal que $H_0=f|_W$, $H_1=\tilde{h}|_W$ y $H((W\setminus M^k)\times I)\subset S^n\setminus\{q,p\}$.

Podemos encontrar entornos abiertos de M^k, V y V', tales que $M^k\subset V'\subset\bar{V}'\subset V\subset\bar{V}\subset W$. Es claro que $H((\bar{V}\setminus V')\times I)\subset S^n\setminus\{q,p\}$. Esto nos permite definir una aplicación continua $\tilde{H}\colon (\bar{V}\setminus V')\times I\cup\partial M^{n+k}\times I\cup(M^{n+k}\setminus V')\{0,1\} \longrightarrow S^n\setminus\{p\}$ por

$$\tilde{H}(z,t) = \begin{cases} H(z,t) & \text{si } z\in\bar{V}\setminus V' \\ q & \text{si } z\in\partial M^{n+k} \\ f(z) & \text{si } t=0 \\ \tilde{h}(z) & \text{si } t=1 \end{cases}.$$

$\tilde{H}$ se puede extender a una aplicación continua $\hat{H}\colon (M^{n+k}\setminus V')\times I \longrightarrow S^n\setminus\{p\}$. Finalmente, la aplicación continua $G\colon (M^{n+k}\times I, \partial M^{n+k}\times I) \longrightarrow (S^n,q)$ definida por

$$G(z,t)=\begin{cases} \hat{H}(z,t) & \text{si } z\in M^{n+k}\setminus V' \\ H(z,t) & \text{si } z\in\bar{V} \end{cases}$$ es la homotopía buscada.

b) CASO GENERAL.

Supongamos que $(f^{-1}(p),F_f)$ y $(h^{-1}(p),F_h)$ son homólogas y consideremos (M^{k+1},F) realizando una homología entre ellas. $M^{k+1}\subset \mathrm{Int}(M^{n+k})\times I$, $M^{k+1}\cap(\mathrm{Int}(M^{n+k})\times\{t\}) = f^{-1}(p)\times\{t\}$ si $t\in[0,1/3)$, $M^{k+1}\cap(\mathrm{Int}(M^{n+k})\times\{t\}) = h^{-1}(p)\times\{t\}$ si $t\in(2/3,1]$ y $F|_{f^{-1}(p)\times\{0\}}=F_f$ y $F|_{h^{-1}(p)\times\{1\}}=F_h$.

Definimos $M'^{k+1}\subset \mathrm{Int}(M^{n+k})\times R$ por

$$M'^{k+1}= (f^{-1}(p)\times(-\infty,0])\cup M^{k+1}\cup(h^{-1}(p)\times[1,\infty)) \quad \text{y} \quad F'=\begin{cases} F_f & \text{si } t\in(-\infty,0] \\ F & \text{si } t\in[0,1] \\ F_h & \text{si } t\in[1,\infty) \end{cases}.$$

Es claro que F' es una familia de secciones de clase C^∞, linealmente independientes, de $\nu(M'^{k+1})$. Sean $F'=\{u'_1,u'_2,\dots,u'_n\}$, $D\subset\nu(M'^{k+1})$ entorno abierto de la sección cero de $\nu(M'^{k+1})$ y $U\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})\times R$ abierto, conteniendo a M'^{k+1}, tal que $exp\colon D\longrightarrow U$ es un difeomorfismo C^∞. Definimos la aplicación

$\psi_{F'}\colon M'^{k+1}\times R^n\longrightarrow\nu(M'^{k+1})$ por

$\psi_{F'}((x,t)(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = ((x,t),\lambda_1u'_1(x,t)+\cdots\cdots+\lambda_nu'_n(x,t))$, la cual es un M'^{k+1}-isomorfismo. Ahora construimos la aplicación de clase C^∞ $L\colon U\longrightarrow S^n\setminus\{q\}$, como la composición de los siguientes aplicaciones de clase C^∞:

$$L\colon U\xrightarrow{exp^{-1}}D\xrightarrow{\psi_{F'}^{-1}}M'^{k+1}\times R^n\xrightarrow{p_2}R^n\xrightarrow{\varphi_n}S^n\setminus\{q\} .$$

Sea W un entorno abierto de M'^{k+1} tal que $M'^{k+1}\subset W\subset\overline{W}\subset U\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})\times R$. Entonces, $\mathcal{U}=\{U,(M^{n+k}\times R)\setminus\overline{W}\}$ es un recubrimiento abierto de $M^{n+k}\times R$.

Sea $\{\mu_1,\mu_2\}$ una partición de la unidad, de clase C^∞, subordinada a $\mathcal{U}$. Sea $H\colon(M^{n+k}\times R,\partial M^{n+k}\times R)\longrightarrow(S^n,q)$ la aplicación

C^∞ definida por $H(x,t)=\dfrac{\mu_1(x,t)L(x,t)+\mu_2(x,t)q}{\|\mu_1(x,t)L(x,t)+\mu_2(x,t)q\|}$ (observemos que $L^{-1}(p)=M'^{k+1}\subset W$ y por tanto el denominador nunca se anula).

De la misma manera que en el Lema III.1.6. se prueba que $H^{-1}(p)=M'^{k+1}$ y $F_H=F'$. La aplicación $H|_{M^{n+k}\times I}$ nos da una homotopía entre H_0 y H_1. Como

$$(H_0^{-1}(p),F_{H_0}) = (f^{-1}(p),F'|_{f^{-1}(p)\times\{0\}}) = (f^{-1}(p),F_f)$$

y $(H_1^{-1}(p),F_{H_1}) = (h^{-1}(p),F'|_{h^{-1}(p)\times\{1\}}) = (h^{-1}(p),F_h)$, de a) deducimos que H_0 es homótopa a f y también que H_1 es homótopa a h. Por tanto, f y h son homótopas.∎

Los resultados anteriores prueban el siguiente teorema.

Teorema III.1.8

Sea (M^{n+k},g) una variedad riemannniana de clase C^∞, T_2, cumpliendo el II.A.N. y de dimensión $n+k$. La aplicación ${}^g\Pi^k_n\colon [M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]\longrightarrow \mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$, definida por ${}^g\Pi^k_n([h]) = [(M^k_f,F_f)]$, donde $f\colon(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(S^n,q)$ es una aplicación de clase C^∞, con $p\in(\text{v.r.})(f)$, homótopa a h, $M^k_f=f^{-1}(p)$ y $F_f=\{u_1,\dots,u_n\}$ es familia de secciones de clase C^∞, linealmente independientes del espacio fibrado normal de M^k_f en (M^{n+k},g), tales que $T_xf(u_j(x))=\theta^p_{c'}(e_j)$ $(c'=(U,\varphi_n^{-1},R^n))$ para todo $j=1,\dots,n$ y todo $x\in M^k_f$, es biyectiva.

Observaciones

a) La aplicación ${}^g\Pi^k_n$ no depende de la base $\{\theta^p_{c'}(e_j)\colon j=1,\dots,n\}$ de T_pS^n, siempre que sea de la orientación usual de S^n.

b) Si g y g' son dos métricas riemannianas en M^{n+k}, la aplicación $({}^{g}\Pi^k_n)\circ({}^{g'}\Pi^k_n)^{-1}:\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g')\longrightarrow\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$ es biyectiva. En lo sucesivo ${}^{g}\Pi^k_n$ se abreviará por Π^k_n y $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$ por $\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$.

Ejemplo III.1.9

Ahora estamos en condiciones de ver que la aplicación $\Gamma:\mathfrak{F}^k_c(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)\longrightarrow\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k};g)$ definida en III.1.3 no es inyectiva en general. Para ello consideremos el siguiente ejemplo: Sean $n\geq 3$ y $k=1$ y tomemos $M^{n+k}\equiv\mathbb{R}^{n+1}$. Como se vio en el capítulo 0, $\Pi_{n+1}(S^n)$ es isomorfo a $\mathfrak{F}^1_c(\mathbb{R}^{n+1})$, así $\mathfrak{F}^1_c(\mathbb{R}^{n+1})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Además, $\Pi^1_n:[\mathbb{R}^{n+1},S^n]\longrightarrow\mathfrak{F}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ es una aplicación biyectiva y por tanto $\mathfrak{F}^1(\mathbb{R}^{n+1})\approx 0$. Así es imposible que $\Gamma:\mathfrak{F}^1_c(\mathbb{R}^{n+1})\longrightarrow\mathfrak{F}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ pueda ser inyectiva.

Según hemos establecido en el capítulo 0, Teorema 0.1.4, si M^{n+k} es una variedad compacta y $n\geq k+2$ se puede definir en $[M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]$ una operación + que le dota de una estructura de grupo abeliano, denotado por $\Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k})$. Pero aún en el caso no compacto, si seguimos las técnicas usadas en [32], es posible, análogamente, definir una suma en $[M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]$ y obtener el grupo de cohomotopía n-ésimo $\Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ del par $(M^{n+k},\partial M^{n+k})$. Basta con tener en cuenta en [32] que el Lema 2.3 puede ser sustituido por el siguiente:

Lema ([8], Teorema 3.2.14]

Si X e Y son espacios T_4, al menos uno de ellos no vacío, tales que $X \times Y$ es fuertemente paracompacto, con $\dim X \leq n$ y $\dim Y \leq m$, se tiene que $\dim(X \times Y) \leq n+m$. En particular, el resultado es cierto, si X e Y son espacios métricos separables.

Así, en cualquier caso, si $n \geq k+2$, $[M^{n+k}, \partial M^{n+k}; S^n, q]$ puede ser dotado de una estructura de grupo, que viene dada por una operación $+$. Este grupo se denota por $\Pi^n(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$ (el grupo de cohomotopía n-ésimo del par $(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$). Podemos transladar esta estructura hasta $\mathfrak{F}^k(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$, mediante la aplicación biyectiva Π_n^k, y tendremos $\Pi_n^k([f]) + \Pi_n^k([h]) = \Pi_n^k([f]+[h])$. No obstante, se puede definir directamente en $\mathfrak{F}^k(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$ una suma $\bullet$ que le dotará de estructura de grupo abeliano. Además $\bullet$ y la operación transladada mediante Π_n^k coinciden. En efecto:

Definimos $\Pi_n^k([f]) \bullet \Pi_n^k([h]) =$

$= [(f^{-1}(p), F_f)] \bullet [(h^{-1}(p), F_h)] = [(f^{-1}(p) \cup h^{-1}(p), F_f \vee F_h)]$, donde f y h son representantes de clase C^∞ de las clases de homotopía, con $p \in (\text{v.r.})(f) \cap (\text{v.r.})(h)$, $f^{-1}(p) \cap h^{-1}(p) = \emptyset$ y

$(F_f \vee F_h)(x) = \begin{cases} F_f & \text{si } x \in f^{-1}(p) \\ F_h & \text{si } x \in h^{-1}(p) \end{cases}$. Observemos que esto siempre se puede conseguir pues al ser $k<n$ existe $s \in S^n \setminus h(f^{-1}(p))$, $s \neq q$ y $s \in (\text{v.r.})(h)$ ([23], pags 263 y 275). Así, $f^{-1}(p) \cap h^{-1}(s) = \emptyset$. Sea ahora $G: (S^n \times I, \{q\} \times I) \longrightarrow (S^n, q)$, aplicación de clase C^∞, tal que G_t es difeomorfismo para todo $t \in I$, $G_0 = \mathrm{Id}_{S^n}$, $G_1(s) = p$. Por tanto, h y $h' = G_1 \circ h$ son homótopas y $h'^{-1}(p) = h^{-1}(G_1^{-1}(p)) = h^{-1}(s)$.

Si $[f]$ y $[h]$ son elementos de $\Pi^n(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$, con $p \in (\text{v.r.})(f) \cap (\text{v.r.})(h)$, $f^{-1}(p) \cap h^{-1}(p) = \emptyset$, se verifica que existen U_1 y U_2 entornos abiertos de $f^{-1}(p)$ y $h^{-1}(p)$ respectivamente, con $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$. En virtud del Lema III.1.6, podemos suponer que

$f|_{M^{n+k}\setminus U_1}=q$ y $h|_{M^{n+k}\setminus U_2}=q$ y así $\Pi^k_n([f])+\Pi^k_n([h]) = \Pi^k_n([f]+[h]) =$

$$= \Pi^k_n([\alpha]),\ \text{donde}\ \alpha(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si}\ x\in U_2 \\ h(x) & \text{si}\ x\in U_1 \end{cases}$$, dado que f y h ya están en posición general.

Como $\Pi^k_n([\alpha]) = [(f^{-1}(p)\cup h^{-1}(p), F_f\vee F_h)] = \Pi^k_n([f])\oplus\Pi^k_n([h])$ se tiene que $\oplus$ y $+$ coinciden.∎

Sea (N^{n+s},g') otra variedad riemanniana de clase C^∞, T_2, II.A.N. y de dimensión $n+s$. Es bien conocido que toda aplicación continua $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ induce una aplicación $f^*:[N^{n+s},\partial N^{n+s};S^n,q]\longrightarrow[M^{n+k},\partial M^{n+k};S^n,q]$ definida por $f^*([h])=[h\circ f]$. Así, mediante las aplicaciones biyectivas Π^k_n y Π^s_n dadas por el Teorema III.1.8, f induce una aplicación $\bar{f}^*:\mathfrak{F}^s(N^{n+s},\partial N^{n+s})\longrightarrow\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$. Los resultados que se establecen a continuación permitirán dar una descripción directa de $\bar{f}^*$, sin pasar por los conjuntos de cohomotopía.

Proposición III.1.10 ([34], pags. 21-22)

Sean N^{n+s} una variedad de clase C^∞, (U, h) un entorno collar de ∂N^{n+s} en N^{n+s} ($h:U\longrightarrow\partial N^{n+s}\times[0,1)$ es un difeomorfismo tal que $h(x)=(x,0)$ para todo $x\in\partial N^{n+s}$). Existe una inmersión difeomórfica $\alpha:N^{n+s}\longrightarrow\mathbb{R}^{m+1}$ para algún $m>0$, tal que $\alpha(N^{n+s})\subset\mathbb{R}^{m+1}_+$, $\alpha(\partial N^{n+s}) = \alpha(N^{n+s})\cap\mathbb{R}^m$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial N^{n+s} \times [0,1) \arrow[ddr, "\partial\alpha \times Id"] & \\
U \arrow[u, "h"] \arrow[d, "l"'] & \\
N^{n+s} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^{m+1}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Proposición III.1.11

Sean $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \longrightarrow (N^{n+s},\partial N^{n+s})$ una aplicación continua (resp. propia) y $N^s \subset Int(N^{n+s})$ una subvariedad cerrada y sin borde de N^{n+s}. Entonces:

a) Existe una aplicación de clase C^∞ (resp. de clase C^∞ y propia) $h:(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \longrightarrow (N^{n+s},\partial N^{n+s})$ homótopa a f (resp. homótopa a f por una homotopía propia) y tal que $h \pitchfork N^s$.

Si dos aplicaciones propias de clase C^∞, $f_1, f_2:(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \longrightarrow (N^{n+s},\partial N^{n+s})$, con $f_1 \pitchfork N^s$ y $f_2 \pitchfork N^s$, son homótopas, por una homotopía propia, entonces son homótopas por una homotopía propia de clase C^∞,

$$H:(M^{n+k} \times I, \partial M^{n+k} \times I) \longrightarrow (N^{n+s},\partial N^{n+s}) \text{ con } H \pitchfork N^s.$$

Demostración

a) Podemos suponer que N^{n+s} está sumergida en $\mathbb{R}^{m+1}$ de la misma manera que en la proposición anterior.

Sea N'^{n+s} la variedad simétrica respecto de $\mathbb{R}^m$ de N^{n+s} y $S(N^{n+s}) = N^{n+s} \cup N'^{n+s}$. Sea U' un entorno tubular de $S(N^{n+s})$ en $\mathbb{R}^{m+1}$ y $r:\overline{U}' \longrightarrow S(N^{n+s})$ la retracción de clase C^∞, usual, tal que r es propia. Sea $\varepsilon:N^{n+s} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función de clase C^∞ tal que

$0<\varepsilon(x')<\mathrm{dist}(x',\mathbb{R}^{m+1}\setminus U')$ para cada $x'\in N^{n+s}$.

Existe una aplicación de clase C^{∞} (resp. de clase C^{∞} y propia), (las aplicaciones propias constituyen un abierto en la topología C^{0} de Whitney) $f_1:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ tal que $\mathrm{dist}(f_1(x),f(x))<\varepsilon(f(x))$ para cada $x\in M^{n+k}$.

En consecuencia, la aplicación de clase C^{∞} $H:(M^{n+k}\times I,\partial M^{n+k}\times I)\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ definida por $H(x,t)=r(tf_1(x)+(1-t)f(x))$ realiza una homotopía (resp. una homotopía propia) entre f y f_1.

Para concluir, basta con encontrar una aplicación de clase C^{∞}, h, verificando $f_1\simeq h$ y $h\pitchfork N^{s}$.

Como $f_1^{-1}(N^{s})$ y $f_1^{-1}(\partial N^{n+s})$ son subconjuntos cerrados y disjuntos de M^{n+k}, existen abiertos W y V de M^{n+k} tales que $f_1^{-1}(N^{s})\subset W\subset\bar{W}\subset V\subset\bar{V}\subset M^{n+k}\setminus f_1^{-1}(\partial N^{n+s})$. Puesto que $\mathcal{U}=\{V,\ M^{n+k}\setminus\bar{W}\}$ es un recubrimiento abierto de M^{n+k}, existe $\{\lambda_1,\ \lambda_2\}$ partición de la unidad de clase C^{∞}, subordinada a $\mathcal{U}$. Se define la aplicación C^{∞} $F:M^{n+k}\times B_{+}^{m+1}(0)\longrightarrow N^{n+s}$ por $F(x,y)=r(f_1(x)+\lambda_1(x)\varepsilon(f_1(x))y)$ donde $B_{+}^{m+1}(0)=\{y\in\mathbb{R}^{m+1}:y_{m+1}>0,\ \|y\|<1\}$.

Si $x\in\partial M^{n+k}$, $y\in B_{+}^{m+1}(0)$ se tiene que $F(x,y)=f_1(x)\in\partial N^{n+s}$ ($\lambda_1(x)=0$), por tanto $F(\partial M^{n+k}\times B_{+}^{m+1}(0))\subset\partial N^{n+s}$. Además, $F\pitchfork N^{s}$. En efecto: sea $(x,y)\in F^{-1}(N^{s})$, en estas condiciones, se tiene que $\lambda_1(x)\neq0$ pues en caso contrario $F(x,y)=f_1(x)$ y así $x\in f_1^{-1}(N^{s})$, por tanto se tendría que $x\in W$ y $\lambda_2(x)=0$, llegándose a la contradicción de que $\lambda_1(x)+\lambda_2(x)=0$. Así, si $(x,y)\in F^{-1}(N^{s})$ se tiene que $F_x:B_{+}^{m+1}(0)\longrightarrow N^{n+s}$ definida por $F_x(y)=F(x,y)$ es una sumersión (por ser la restricción a un abierto de una sumersión) y se concluye que $F\pitchfork N^{s}$.

Aplicando el *Teorema de densidad parametrizado de Abraham* ([23] pag 298) se deduce la existencia de $y_0 \in B_+^{m+1}(0)$ tal que la aplicación de clase C^∞ $h=F_{y_0}: M^{n+k} \longrightarrow N^{n+s}$ definida por $F_{y_0}(x)=F(x,y_0)$ es transversal a N^s. Consideremos $G: (M^{n+k}xI, \partial M^{n+k}xI) \longrightarrow (N^{n+s}, \partial N^{n+s})$ la aplicación de clase C^∞ (resp. de clase C^∞ y propia si f es propia) definida por $G(x,t)=F(x,ty_0)$. Se tiene que $G_0=f_1$ y $G_1=F_{y_0}=h$, $h \bar{\pitchfork} N^s$.

b) Sea $H: (M^{n+k}xI, \partial M^{n+k}xI) \longrightarrow (N^{n+s}, \partial N^{n+s})$ una homotopía propia con $H_0=f_1$ y $H_1=f_2$. Sean también, $S(N^{n+s})$, U' y $\varepsilon: N^{n+s} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como en a). Existe una aplicación de clase C^∞, propia, $G: (M^{n+k}xI, \partial M^{n+k}xI) \longrightarrow (N^{n+s}, \partial N^{n+s})$ tal que $dist(H(x,t), G(x,t)) < \varepsilon(H(x,t))$, para cada $(x,t) \in M^{n+k}xI$.

Sea $\alpha: I \longrightarrow I$ una aplicación de clase C^∞ tal que $\alpha|_{[0,1/3)}=0$, $\alpha|_{(2/3,1]}=1$ y $\alpha'(t)>0$ si $t \in (1/3, 2/3)$.

Sea $\mathcal{U}=\{M^{n+k}x(0,1), \; M^{n+k}x[0,1/3) \cup M^{n+k}x(2/3,1]\}$, $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de $M^{n+k}xI$, por tanto existe $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{U}$.

Definimos $F: (M^{n+k}xI, \partial M^{n+k}xI) \longrightarrow (N^{n+s}, \partial N^{n+s})$ por $F(x,t)=r(\lambda_1(x,t)G(x,\alpha(t))+\lambda_2(x,t)H(x,\alpha(t)))$. Es claro que F es una función de clase C^∞ y $F_0=f_1$ y $F_1=f_2$.

Como $F^{-1}(N^s)$ y $F^{-1}(\partial N^{n+s})$ son subconjuntos cerrados y disjuntos de $M^{n+k}xI$, existen abiertos W y V de $M^{n+k}xI$, tales que $F^{-1}(N^s) \subset W \subset \bar{W} \subset V \subset \bar{V} \subset (M^{n+k}xI) \setminus F^{-1}(\partial N^{n+s})$.

Puesto que $\mathcal{V}=\{V, \; (M^{n+k}xI) \setminus \bar{W}\}$ es un recubrimiento abierto de $M^{n+k}xI$, existe $\{\mu_1, \mu_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{V}$ y se define la aplicación C^∞,

$$L: M^{n+k}\times I\times B_{+}^{m+1}(0) \longrightarrow N^{n+s} \text{ por}$$

$L((x,t),y) = r(F(x,\alpha(t))+\sigma(t)\mu_1(x,\alpha(t))\varepsilon(F(x,\alpha(t))y)$, donde $\sigma: I \longrightarrow I$ es una aplicación C^{∞} con $\sigma|_{[0,1/3)\cup(2/3,1]}=0$ y $\sigma(t)>0$ si $t\in(1/3,2/3)$.

Si $(x,t)\in\partial M^{n+k}\times I$ y $y\in B_{+}^{m+1}(0)$, se tiene que $L((x,t),y)=F(x,\alpha(t))\in\partial N^{n+s}$. Además, $L \pitchfork N^{s}$. En efecto:

Sea $((x,t),y)\in L^{-1}(N^{s})$, en estas condiciones, $\mu_1(x,\alpha(t))\neq 0$ pues en caso contrario $L((x,t),y)=F(x,\alpha(t))$ y así $(x,\alpha(t))\in W$ y $\mu_2(x,\alpha(t))=0$ lo cual es absurdo. Así, si $((x,t),y)\in L^{-1}(N^{s})$ puede ocurrir:

1) $t\in[0,1/3]\cup[2/3,1]$. En cuyo caso $\sigma(t)=0$ y

$$L_{t,y}(x) = L((x,t),y) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } t\in[0,1/3] \\ f_2(x) & \text{si } t\in[2/3,1] \end{cases}.$$

2) $t\notin[0,1/3]\cup[2/3,1]$. Entonces, se tiene que $L_{x,t}(y) = L((x,t),y)$ es una sumersión (por ser la restricción a un abierto de una sumersión).

Se concluye por tanto que $L \pitchfork N^{s}$.

Aplicando el teorema de densidad parametrizado de Abraham, se deduce la existencia de $y_0\in B_{+}^{m+1}(0)$, tal que la aplicación de clase C^{∞} $L_{y_0}: (M^{n+k}\times I, \partial M^{n+k}\times I) \longrightarrow (N^{n+s}, \partial N^{n+s})$ definida por $L_{y_0}(x,t) = L((x,t),y_0)$ es transversal a N^{s}, propia, y $(L_{y_0})_0=f_1$ y $(L_{y_0})_1=f_2$. ∎

Proposición III.1.12

Sea $f: (M^{n+k},\partial M^{n+k}) \longrightarrow (N^{n+s},\partial N^{n+s})$ una aplicación continua. Entonces:

a) f induce una aplicación

$\overline{f}^{\bullet}:\mathfrak{J}^{s}(N^{n+s},\partial N^{n+s})\longrightarrow\mathfrak{J}^{k}(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ (homomorfismo si $n\geq k+2$ y $n\geq s+2$), de forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Pi^{n}(N^{n+s},\partial N^{n+s}) & \xrightarrow{f^{\bullet}} & \Pi^{n}(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Pi^{s}_{n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi^{k}_{n}} \\
\mathfrak{J}^{s}(N^{n+s},\partial N^{n+s}) & \xrightarrow{\overline{f}^{\bullet}} & \mathfrak{J}^{k}(M^{n+k},\partial M^{n+k})
\end{array}$$

es conmutativo.

b) si f es propia, f induce una aplicación

$$(\overline{f}^{\bullet})_{c}:\mathfrak{J}^{s}_{c}(N^{n+s},\partial N^{n+s})\longrightarrow\mathfrak{J}^{k}_{c}(M^{n+k},\partial M^{n+k}).$$

Demostración

a) Sea $[(N^{s},F)]\in\mathfrak{J}^{s}(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ con $F=\{u_{1},\dots,u_{n}\}$ y $\alpha:(N^{n+s},\partial N^{n+s})\longrightarrow(S^{n},q)$ una aplicación C^{∞} tal que $(\alpha^{-1}(p),F_{\alpha})=(N^{s},F)$.

Sea $h:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ una aplicación de clase C^{∞}, homótopa a f, tal que $h\overline{\pitchfork}N^{s}$. Se define $\overline{f}^{\bullet}[(N^{s},F)]=[(h^{-1}(N^{s}),h^{\bullet}F)]$, donde $h^{\bullet}F=\{v_{1},\dots,v_{n}\}$ de forma que $T_{x}h(v_{i}(x))=u_{i}(h(x))$ $i=1,\dots,n$ (esto se puede hacer, puesto que según 0.3.21 $\overline{Th}:\nu(h^{-1}(N^{s}))\xrightarrow{\approx}h^{\bullet}(\nu(N^{s}))$ es $h^{-1}(N^{s})$-isomorfismo).

Así,

$$(\Pi^{k}_{n}\circ f^{\bullet})([\alpha])=\Pi^{k}_{n}([\alpha\circ f])=\Pi^{k}_{n}([\alpha\circ h])=[(h^{-1}(\alpha^{-1}(p)),F_{\alpha\circ h})].$$

Pero $T_{x}(\alpha\circ h)(v_{i}(x))=(T_{h(x)}\alpha\circ T_{x}h)(v_{i}(x))=T_{h(x)}\alpha(u_{i}(h(x)))=$ $=\theta^{p}_{c'}(e_{i})$ $i=1,\dots,n$, y en consecuencia

$(\Pi^{k}_{n}\circ f^{\bullet})([\alpha])=[(h^{-1}(N^{s}),h^{\bullet}F)]=(\overline{f}^{\bullet}\circ\Pi^{s}_{n})([\alpha])$.

También se tiene, en el caso en que los conjuntos anteriores sean grupos, que $\overline{f}^{\bullet}$ es un homomorfismo.

b) La aplicación $(\overline{f}^{\bullet})_c$ se define por $(\overline{f}^{\bullet})_c([(N^s,F)]) = [(h^{-1}(N^s),h^{\bullet}F)]$, donde $h\colon (M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ es una aplicación propia de clase C^{∞}, homótopa a f, por una homotopía propia y tal que $h\bar{\pitchfork}N^s$ (III.1.11).

Que $(\overline{f}^{\bullet})_c$ es una aplicación, se sigue de III.1.11. *b*).■

Proposición III.1.13

Sean

$f\colon (M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ y $g\colon (N^{n+s},\partial N^{n+s})\longrightarrow(P^{n+m},\partial P^{n+m})$ aplicaciones continuas. Entonces, $\overline{(g\circ f)}^{\bullet} = \overline{f}^{\bullet}\circ\overline{g}^{\bullet}$. Además, si f y g son propias, se verifica que $\overline{(g\circ f)}^{\bullet}_c = (\overline{f}^{\bullet})_c\circ(\overline{g}^{\bullet})_c$. Por último $(\overline{\mathrm{Id}_{M^{n+k}}})^{\bullet} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})}$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de la propiedad transitiva de la transversalidad y de la imagen inversa de fibrados vectoriales.■

La proposición que sigue da una interpretación del operador coborde, de los conjuntos de cohomotopía que estamos estudiando, en términos de variedades normalmente referenciadas.

Proposición III.1.14

Sean (M^{n+k},g) una variedad riemanniana de clase C^{∞} y $\delta\colon \Pi^{n-1}(\partial M^{n+k})\longrightarrow\Pi^{n}(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ el operador coborde (0.1.5). Sea (U,h) un entorno collar de ∂M^{n+k} en M^{n+k} ($H\colon U\longrightarrow\partial M^{n+k}\times[0,1)$ es un difeomorfismo tal que $H|_{\partial M^{n+k}}=\mathrm{Id}_{\partial M^{n+k}\times\{0\}}$). Consideremos $[(M^k,F)]\in\mathfrak{J}^k(\partial M^{n+k})$ y $[(M^k\times\{1/2\},\delta F)]\in\mathfrak{J}^k(\partial M^{n+k}\times[0,1),\partial M^{n+k}\times\{0\})$, donde $\delta F = \{F \ , \ \theta^{1/2}_{c_1}(1)\}$ ($c_1=([0,1),\mathrm{Id},\mathbb{R})$). Se define $\bar{\delta}([(M^k,F)]) = \bar{H}^*([(M^k\times\{1/2\},\delta F)]) \in \Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ (ver III.1.12).

En estas condiciones, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi^{n-1}(\partial M^{n+k}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Pi^k_{n-1}"'] & \Pi^n(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \arrow[d, "\Pi^k_n"] \\
\mathfrak{J}^k(\partial M^{n+k}) \arrow[r, "\bar{\delta}"] & \mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración

Sean $[(M^k,F)]\in\mathfrak{J}^k(\partial M^{n+k})$ y $F=\{u_1,\dots,u_{n-1}\}$, $f:\partial M^{n+k}\longrightarrow S^{n-1}$ una aplicación de clase C^∞, tal que $p\in(\mathrm{v.r.})(f)$ y $(f^{-1}(p),F_f) = (M^k,F)$. Consideremos $U\subset M^{n+k}$ y $H:U\longrightarrow\partial M^{n+k}\times[0,1)$ como en el enunciado. Como $\mathcal{U}=\{U,M^{n+k}\setminus H^{-1}(\partial M^{n+k}\times[0,2/3])\}$ es un recubrimiento abierto de M^{n+k}, existe $\{\mu_1,\mu_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{U}$. Definimos la función de clase C^∞ $\tilde{f}:M^{n+k}\longrightarrow\bar{B}^n(0)$ por

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \mu_1(z)(1-p_2(H(z)))f(p_1(H(z))) & \text{si } z\in U \\ 0 & \text{si } z\notin U \end{cases}.$$

Es claro que $\tilde{f}|_{\partial M^{n+k}} = f$, $1/2\ p \in (\mathrm{v.r.})(\tilde{f})$ y $(\Pi^k_n\circ\delta)([f]) = [(\tilde{f}^{-1}(1/2\ p),F_{\tilde{f}})]$.

Como $\tilde{f}^{-1}(1/2\ p)\subset U$, si $z\in\tilde{f}^{-1}(1/2\ p)$ se tiene que $f(p_1(H(z)))=p$ y $\mu_1(z)(1-p_2(H(z)))=1/2$. De $\mu_1(z)\le 1$, se deduce que $1-p_2(H(z))\ge 1/2$ y así $p_2(H(z))\le 1/2$, por tanto $z\in H^{-1}(\partial M^{n+k}\times[0,2/3])$ y $\mu_1(z)=1-\mu_2(z)=1$. En consecuencia

$$\tilde{f}^{-1}(1/2\ p) = H^{-1}(f^{-1}(p)\times\{1/2\}) = H^{-1}(M^k\times\{1/2\}).$$

Con el fin de calcular $F_{\tilde{f}}$, consideramos la aplicación $f\times\mathrm{Id}:\partial M^{n+k}\times[0,1)\longrightarrow S^{n-1}\times[0,1)$ y vamos a calcular la referencia asociada a $(f\times\mathrm{Id})^{-1}(p,1/2)$.

Si $x\in f^{-1}(p)$ y $i\in\{1,\dots,n-1\}$, se tiene que

$$(T_x f, T_{1/2}\mathrm{Id})(u_i(x),0) = \Theta_C^p(e_i)\times\{0\} \text{ y}$$

$$(T_x f, T_{1/2}\mathrm{Id})(0,\Theta_{C_1}^{1/2}(1)) = (0,\Theta^{1/2}(1)).$$

Consideramos, a continuación, la aplicación de clase C^∞ $\varphi:S^n\times[0,1)\longrightarrow B^n(0)$ definida por $\varphi(x,t)=(1-t)x$. Existen entornos abiertos $U_p\times V_{1/2}$ de $(p,1/2)$ en $S^{n-1}\times[0,1)$ y $U'_{1/2\ p}$ de $1/2\ p$ en $B^n(0)$ tales que $\varphi:U_p\times V_{1/2}\longrightarrow U'_{1/2\ p}$ es un difeomorfismo conservando la orientación. Sea $V=H^{-1}(\partial M^{n+k}\times[0,2/3))$. La aplicación $\tilde{f}|_V:V\longrightarrow\overline{B}^n(0)$ se puede factorizar como $\tilde{f}|_V:V\xrightarrow{H}\partial M^{n+k}\times[0,2/3)\xrightarrow{f\times\mathrm{Id}}S^{n-1}\times[0,2/3)\xrightarrow{\varphi}B^n(0)$.

Como para el cálculo de la referencia asociada a $\tilde{f}^{-1}(1/2\ p)$ nos es indiferente la base positiva de $T_{1/2\ p}B^n(0)$ que elijamos, podemos tomar $\{T_{(p,1/2)}\varphi(\Theta_C^p(e_1),0),\dots\dots,T_{(p,1/2)}\varphi(\Theta_C^p(e_{n-1}),0),$ $T_{(p,1/2)}\varphi(0,\Theta_{C1}^p(1))\}$. y así es claro que $F_{\tilde{f}} = H^*(F_{f\times\mathrm{Id}}) = H^*(\delta F)$.

Por tanto, $(\Pi_n^k\circ\delta)([f]) = [(\tilde{f}^{-1}(1/2\ p),F_{\tilde{f}})] = \overline{H}^*([(M^k\times\{1/2\},\delta F)]) =$ $= \overline{\delta}([(M^k,F)]) = (\overline{\delta}\circ\Pi_{n-1}^k)([f])$.■

Proposición III.1.15

Sean (M^{n+k},g) y (N^{n+s},g') variedades riemannianas de clase C^∞ y $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(N^{n+s},\partial N^{n+s})$ una aplicación continua. Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{J}^{s}(N^{n+s},\partial N^{n+s}) & \xrightarrow{\ \overline{f}^{*}\ } & \mathfrak{J}^{k}(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle\delta} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\overline{\delta}} \\
\mathfrak{J}^{s}(\partial N^{n+s}) & \xrightarrow{\ (\overline{f|_{\partial M^{n+k}}})^{*}\ } & \mathfrak{J}^{k}(\partial M^{n+k})
\end{array}$$

es conmutativo.

Demostración

Es consecuencia inmediata de III.1.14, III.1.12 y 0.1.6.∎

III.2 GRADO GENERALIZADO EN VARIEDADES

Por M^{n+k} y M^n designaremos variedades diferenciables orientadas de dimensiones $n+k$ y n respectivamente con $\partial M^n=\emptyset$ y M^n conexa.

Sea x_0 un elemento fijo de M^n. Siguiendo un proceso análogo al desarrollado en III.1, para cada aplicación continua $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ vamos a definir el grado de f en x_0, que se denotará por $d(f,x_0)$, como un elemento de $\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$. Obsérvese que $\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ tiene estructura de grupo si $n\geq k+2$ y que existen variedades no compactas para las cuales $\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})\neq 0$.

Definición III.2.1

Sea $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ una aplicación de clase C^∞ tal que x_0 es un valor regular de f. Definimos el grado de f en x_0, $d(f,x_0) = [(f^{-1}(x_0),F_f)] \in \mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$, donde $F_f=\{u_1,\dots,u_n\}$ es la referencia normal de $f^{-1}(x_0)$ tal que $T_xf(u_i(x)) = \theta_c^{x_0}(e_i)$ para todo $i=1,\dots,n$ y todo $x\in f^{-1}(x_0)$, siendo $c=(U^{x_0},\varphi,\mathbb{R}^n)$ una carta de la orientación de M^n con $x_0\in U^{x_0}$.

Consistencia de la definición III.2.1

Si $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ es una aplicación en las condiciones anteriores, $d(f,x_0)$ no depende de la carta c de la orientación de M^n. En efecto: sean $c=(U^{x_0},\varphi,\mathbb{R}^n)$ y $c'=(U'^{x_0},\varphi',\mathbb{R}^n)$ cartas de la orientación de M^n. Es claro que $\{\theta_c^{x_0}(e_i)\}_{i=1}^n$ y

$\{\Theta^{x_0}_{C'}(e_i)\}_{i=1}^n$ son, ambas, bases positivas de $T_{x_0}M^n$. Consideremos $F_f=\{u_1,\dots,u_n\}$ de forma que $T_xf(u_i(x)) = \Theta^{x_0}_C(e_i)$ para todo $i=1,2,\dots,n$ y todo $x\in f^{-1}(x_0)$. Entonces, $\Theta^{x_0}_{C'}(e_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\Theta^{x_0}_C(e_j)$ $i=1,\dots,n$, con $|(a_{ij})|>0$. Sean $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ y $v_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)$ $i=1,2,\dots,n$. Es evidente que $F'_f=\{v_1,\dots,v_n\}$ es la referencia de $f^{-1}(x_0)$ tal que $T_xf(v_i(x)) = \Theta^{x_0}_{C'}(e_i)$ para todo $i=1,2,\dots,n$ y todo $x\in f^{-1}(x_0)$. Así, hemos de probar que $(f^{-1}(x_0),F_f)$ y $(f^{-1}(x_0),F'_f)$ son homólogas. Existe una aplicación de clase C^∞ $\sigma:I\longrightarrow GL_+(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(t)=(a^t_{ij})$, tal que $\sigma(0)=Id_{\mathbb{R}^n}$ y $\sigma(1)=A$. Por tanto $(f^{-1}(x_0)\times I,\sigma(F_f))$, donde $\sigma(F_f)(x,t) = (\sum_{j=1}^n a^t_{1j}u_j(x),\dots\dots,\sum_{j=1}^n a^t_{nj}u_j(x))$, realiza una homología entre $(f^{-1}(x_0),F_f)$ y $(f^{-1}(x_0),F'_f)$.∎

Proposición III.2.2

Sea $H:(M^{n+k}\times I,\partial M^{n+k}\times I)\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ una aplicación C^∞ tal que $x_0\in(\text{v.r.})(H_0)\cap(\text{v.r.})(H_1)\cap(\text{v.r.})(H)$. Entonces se tiene que $d(H_0,x_0) = d(H_1,x_0)$.

Demostración

Consideramos $\alpha:I\longrightarrow I$ aplicación de clase C^∞ tal que $\alpha|_{[0,1/3)}=0$, $\alpha|_{(2/3,1]}=1$ y $\alpha'(t)>0$ si $t\in(1/3,2/3)$, y definimos $H':M^{n+k}\times I\longrightarrow M^n$ por $H'(x,t) = H(x,\alpha(t))$ (se cumple que $x_0\in(\text{v.r.})(H'_0)\cap(\text{v.r.})(H'_1)\cap(\text{v.r.})(H'))$. La variedad $(H'^{-1}(x_0),F_{H'})$

realiza una homología entre $(H_0^{-1}(x_0),F_{H_0})$ y $(H_1^{-1}(x_0),F_{H_1})$ y por tanto $d(H_0,x_0) = d(H_1,x_0)$.■

Corolario III.2.3

Sea $H:(M^{n+k}xI,\partial M^{n+k}xI)\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ una aplicación de clase C^∞ tal que $x_0\in(v.r.)(H_0)\cap(v.r.)(H_1)$. Entonces, $d(H_0,x_0) = d(H_1,x_0)$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de III.2.2 y de que existe una homotopía C^∞ $H':(M^{n+k}xI,\partial M^{n+k}xI)\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ tal que $x_0\in(v.r.)(H')$ y $H'_0=H_0$ y $H'_1=H_1$.■

Proposición III.2.4

Si $\partial M^{n+k}=\emptyset$ y $f:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ es una aplicación de clase C^∞ y $x_0,x_1\in(v.r.)(f)$, se tiene que $d(f,x_0) = d(f,x_1)$.

Demostración

Basta considerar una isotopía C^∞ $H:M^nxI\longrightarrow M^n$ tal que $H_0=Id$ y $H_1(x_0)=x_1$. Sea $G=H\circ(fxId):M^{n+k}xI\longrightarrow M^n$. Por el corolario III.2.3 se verifica que $d(G_0,x_1) = d(G_1,x_1)$. Como $G_0=f$ y $G_1=H_1\circ f$, se tiene que $d(f,x_1) = d(G_1,x_1) = d(H_1\circ f,x_1) =$ $= [(H_1\circ f)^{-1}(x_1),F_{H_1\circ f})] = [(f^{-1}(x_0),F_{H_1\circ f})]$.

Observemos que $F_{H_1\circ f} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ de forma que

$T_xf(v_i(x)) = T_{x_1}H_1^{-1}(\theta_{C_1}^{x_1}(e_i))$ para todo $i=1,\ldots,n$ y todo

$x\in f^{-1}(x_0)$, donde $c_1=(\mathrm{U}^{x_1},\varphi,\mathbb{R}^n)$ es carta de la orientación de M^n, con $x_1\in \mathrm{U}^{x_1}$. Como $c_0=(H_1^{-1}(\mathrm{U}^{x_1}),\varphi\circ H_1,\mathbb{R}^n)$ es carta de la orientación de M^n, $x_0\in H_1^{-1}(\mathrm{U}^{x_1})$ y $\mathrm{T}_{x_1}H_1^{-1}(\Theta_{c_1}^{x_1}(e_i)) = \Theta_{c_0}^{x_0}(e_i)$ $i=1,\dots,n$, se tiene que $(f^{-1}(x_0),F_{H_1\circ f})$ y $(f^{-1}(x_0),F_f)$ son homólogas.∎

Definición III.2.5

a) Supongamos que $\partial\mathrm{M}^{n+k}=\emptyset$ y sea $f:\mathrm{M}^{n+k}\longrightarrow\mathrm{M}^n$ una aplicación de clase C^∞. Se define el grado de f, y se denotará por $\mathrm{d}(f)$, como el elemento $\mathrm{d}(f) = \mathrm{d}(f,x_0)\in\mathfrak{J}^k(\mathrm{M}^{n+k})$, donde x_0 es un valor regular cualquiera de f.

b) Supongamos que $\partial\mathrm{M}^{n+k}=\emptyset$. Si $f:\mathrm{M}^{n+k}\longrightarrow\mathrm{M}^n$ es una aplicación continua, se define el grado de f por $\mathrm{d}(f) = \mathrm{d}(g)\in\mathfrak{J}^k(\mathrm{M}^{n+k})$, donde $g:\mathrm{M}^{n+k}\longrightarrow\mathrm{M}^n$ es una aplicación de clase C^∞ homótopa a f.

Consistencia de la definición III.2.5

Si $g_1,g_2:\mathrm{M}^{n+k}\longrightarrow\mathrm{M}^n$ son aplicaciones de clase C^∞ homótopas a f, entonces g_1 y g_2 son homótopas y por consiguiente son homótopas por una aplicación de clase C^∞ que denotaremos por G. Tomando ahora $x_0\in\mathrm{M}^n$ tal que $x_0\in(\mathrm{v.r.})(G)\cap(\mathrm{v.r.})(g_1)\cap(\mathrm{v.r.})(g_2)$ se tiene que $\mathrm{d}(g_1) = \mathrm{d}(g_1,x_0) = \mathrm{d}(g_2,x_0) = \mathrm{d}(g_2)$.∎

Observación III.2.6

Si $\mathrm{M}^n=\mathrm{S}^n$ y $\partial\mathrm{M}^{n+k}=\emptyset$, se verifica que $\mathrm{d}(f) = \Pi_n^k([f])$ para toda aplicación continua $f:\mathrm{M}^{n+k}\longrightarrow\mathrm{S}^n$.

Poroposición III.2.7

Supongamos que $\partial M^{n+k}=\emptyset$. Si $f,g:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ son aplicaciones continuas, homótopas, se tiene que $d(f) = d(g)$. Por tanto, el grado de aplicaciones continuas define una aplicación $d:[M^{n+k},M^n]\longrightarrow \mathfrak{J}^k(M^{n+k})$ y una aplicación $d^* = \Pi^k_n\circ d:[M^{n+k},M^n]\longrightarrow [M^{n+k},S^n] = \Pi^n(M^{n+k})$.

Demostración

Sean f_1 una aplicación C^∞ tal que $f_1\approx f$ y g_1 una aplicación C^∞ tal que $g_1\approx g$. Así, obtenemos que $f_1\approx g_1$ y por tanto f_1 y g_1 son homótopas por una homotopía C^∞. Razonando como antes se concluye el resultado.■

Proposición III.2.8

Sean $f:P^{n+k+s}\longrightarrow M^{n+k}$ y $g:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ aplicaciones continuas, donde $\partial P^{n+k+s}=\partial M^{n+k}=\emptyset$ y M^{n+k} es conexa. Entonces, $d(g\circ f) = \bar{f}^*(d(g))$ (III.1.12).

Demostración

Sea $x_0\in M^n$. Consideremos $g_1:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ aplicación de clase C^∞ homótopa a g con $x_0\in(\text{v.r.})(g_1)$. Por III.1.11 existe $f_1:P^{n+k+s}\longrightarrow M^{n+k}$ aplicación de clase C^∞, homótopa a f y tal que $f_1 \bar{\pitchfork} g_1^{-1}(x_0)$. Entonces, $g_1\circ f_1$ es una aplicación de clase C^∞, homótopa a $g\circ f$ y $x_0\in(\text{v.r.})(g_1\circ f_1)$. Así, por III.1.12 a) $\bar{f}^*(d(g)) = \bar{f}^*([[(g_1^{-1}(x_0), F_{g_1})]]) = [(f_1^{-1}(g_1^{-1}(x_0)), f_1^*(F_{g_1}))] =$

$= d(g\circ f)$.■

Sean M^{n+k}, M^n y $x_0\in M^n$ como al principio del párrafo.

Enunciamos, sin demostración la siguiente proposición.

Proposición III.2.9

a) Sea $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ una aplicación propia. Entonces, existe una aplicación propia $g:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ de clase C^∞ tal que $x_0\in(\text{v.r.})(g)$ y f es homótopa a g, por una homotopía propia $F:(M^{n+k}xI,\partial M^{n+k}xI)\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$. (Análoga a III.1.11 *a*)).

b) Si dos aplicaciones propias de clase C^∞ $f_1,f_2:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ con $x_0\in(\text{v.r.})(f_1)\cap(\text{v.r.})(f_2)$ son homótopas por una homotopía propia entonces son homótopas por una homotopía propia de clase C^∞, $H:(M^{n+k}xI,\partial M^{n+k}xI)\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ con $x_0\in(\text{v.r.})(H)$. (Análoga a III.1.11 *b*)).

Como consecuencia de esta proposición y de III.2.3, es posible definir, para cada aplicación propia $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$, el grado de f en x_0.

Definición III.2.10

Sea $f:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ una aplicación propia. Se define el grado de f en x_0, y se designará por $d(f,x_0)$, como el elemento $d(f,x_0)=[(g^{-1}(x_0),F_g)]$ de $\mathfrak{J}^k_c(M^{n+k},\partial M^{n+k})$, donde $g:(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ es una aplicación propia de clase

C^∞ con $x_0\in(\text{v.r.})(g)$, homótopa a f por una homotopía propia (III.2.9 a)).

Consistencia de la definición III.2.10

Por III.2.9 *b)*, la definición anterior es independiente de la elección de la aplicación g.■

Proposición III.2.11

Sean $f,g\colon(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0\})$ aplicaciones propias, homótopas por una homotopía propia. Entonces, $d(f,x_0)=d(g,x_0)$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de la definición III.2.10 y de la proposición III.2.9 *b)*.■

Proposición III.2.12

Sean $f\colon M^{n+k}\longrightarrow M^n$ una aplicación propia, Ω una componente conexa de $M^n\setminus f(\partial M^{n+k})$ (como $f(\partial M^{n+k})$ es cerrado en M^n, Ω es un abierto conexo de M^n) y $x_0,x_1\in\Omega$. Entonces, $d(f,x_0)=d(f,x_1)$.

Demostración

Como Ω es conexo y abierto de M^n, por un argumento de conexión no hay pérdida de generalidad al suponer que x_0 y x_1 están en el dominio de una carta $c=(U,\varphi,\mathbb{R}^n)$ de M^n, con $\varphi\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ difeomorfismo.

Sea $g\colon(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\{x_0,x_1\})$ una aplicación propia de clase C^∞ homótopa a f, por una homotopía propia, y $x_0,x_1\in(\text{v.r.})(g)$. Sea $H\colon U\times I\longrightarrow U$ una isotopía de clase C^∞, tal que

H_0=Id y $H_1(x_0)=x_1$ y definimos $G:g^{-1}(\mathrm{U})\times\mathrm{I}\longrightarrow\mathrm{U}$ por $G=H\circ(g\times\mathrm{Id})$. Es claro que G es una aplicación propia de clase C^∞. Por III.2.9.*b*) existe $G':g^{-1}(\mathrm{U})\times\mathrm{I}\longrightarrow\mathrm{U}$ aplicación propia de clase C^∞ tal que $x_1\in(\mathrm{v.r.})(G')$ y $G'_0=G_0$ y $G'_1=G_1$. Así, $\mathrm{d}(g,x_1)$ = $[(G'^{-1}_0(x_0),F_{G'_0})]$ = = $[(G'^{-1}_1(x_1),F_{G'_1})]$ = $[(g^{-1}(x_0),F_{H_1\circ g})]$ = $[(g^{-1}(x_0),F_g)]$ en $\mathfrak{J}^k(\mathrm{M}^{n+k},\partial\mathrm{M}^{n+k})$ (ver la demostración de la Prop.III.2.4). Como $[(g^{-1}(x_0),F_g)]$ = $\mathrm{d}(g,x_0)$ se concluye el resultado.■

Corolario III.2.13

Supongamos que $\partial\mathrm{M}^{n+k}=\emptyset$. Sea $f:\mathrm{M}^{n+k}\longrightarrow\mathrm{M}^n$ una aplicación propia. Entonces, para todo $x_0,x_1\in\mathrm{M}^n$, se tiene que $\mathrm{d}(f,x_0)$ = $\mathrm{d}(f,x_1)$.

Al único elemento de $\mathfrak{J}^k_c(\mathrm{M}^{n+k})$ dado por el corolario III.2.13 se le llama grado de f y se designará por $\mathrm{d}(f)$.

Proposición III.2.14

Sean $f,g:\mathrm{M}^{n+k}\longrightarrow\mathrm{M}^n$ aplicaciones propias homótopas por una homotopía propia, donde $\partial\mathrm{M}^{n+k}=\emptyset$. Entonces, $\mathrm{d}(f)$ = $\mathrm{d}(g)$. Por tanto, el grado de aplicaciones propias define una aplicación $\mathrm{d}:[\mathrm{M}^{n+k},\mathrm{M}^n]_p\longrightarrow\mathfrak{J}^k_c(\mathrm{M}^{n+k})$, donde denotamos por $[\mathrm{M}^{n+k},\mathrm{M}^n]_p$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones propias determinadas por homotopías propias.

Demostración

Es consecuencia inmediata de III.2.10, III.2.11 y III.2.13.■

Proposición III.2.15

Sean $f:P^{n+k+s}\longrightarrow M^{n+k}$ y $g:M^{n+k}\longrightarrow M^{n}$ aplicaciones propias, donde $\partial P^{n+k+s}=\partial M^{n+k}=\emptyset$ y M^{n+k} es conexa. Entonces, $d(g\circ f) = (\bar{f}^{*})_{c}(d(g))$ (III.1.12 *b*)).

Demostración

Sea $x_0\in M^n$. Consideremos $g_1:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ aplicación propia de clase C^∞ homótopa a g por una homotopía propia con $x_0\in(\text{v.r.})(g_1)$ (III.2.9 a)). Por III.1.11, existe $f_1:P^{n+k+s}\longrightarrow M^{n+k}$ aplicación propia de clase C^∞ homótopa a f por una homotopía propia y tal que $f_1 \pitchfork g_1^{-1}(x_0)$. Entonces, $g_1\circ f_1$ es una aplicación de clase C^∞ homótopa a $g\circ f$ por una homotopía propia con $x_0\in(\text{v.r.})(g_1\circ f_1)$. Así, por III.1.12 *b*),

$$(\bar{f}^{*})_{c}(d(g)) = (\bar{f}^{*})_{c}([(g_1^{-1}(x_0),F_{g_1})]) = [(f_1^{-1}(g_1^{-1}(x_0)),f_1^{*}(F_{g_1}))] =$$

$= d(g\circ f).$ ∎

Proposición III.2.16

Supongamos que $\partial M^{n+k}=\emptyset$. Sea $f:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ una aplicación propia no suprayectiva. Entonces, $d(f)=0$. Por tanto, si $d(f)\neq0$, se verifica que f es suprayectiva.

Demostración

Como f es cerrada, $f(M^{n+k})$ es un cerrado en M^n. Por tanto, por la demostración de III.1.11 si $x_1\notin f(M^{n+k})$ existe $g:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ aplicación propia de clase C^∞ con $x_0\notin \operatorname{img}$, y homótopa a f por una homotopía propia. Así, $d(f) = d(g) = [(g^{-1}(x_0),F_g)] = [(\emptyset,F_g)]=0.$ ∎

Proposición III.2.17

Supongamos que M^{n+k+1} es una variedad compacta, $M^{n+k}=\partial M^{n+k+1}$ y que $\delta:\Pi^n(\partial M^{n+k+1})\longrightarrow\Pi^{n+1}(M^{n+k+1},\partial M^{n+k+1})$ es inyectiva. Entonces, para toda aplicación continua $f:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ que admite una extensión continua $\bar{f}:M^{n+k+1}\longrightarrow M^n$ se verifica que $d(f)=0$.

Demostración

Por III.2.7 y III.1.1, es claro que es suficiente demostrar el resultado para aplicaciones C^∞.

Sea $\bar{g}:M^{n+k+1}\longrightarrow M^n$ una aplicación de clase C^∞ y $g=\bar{g}|_{M^{n+k}}$. Consideremos $x_0\in M^n$ un valor regular de g y de $\bar{g}$.

Por el teorema III.1.10 existe $\alpha:M^{n+k+1}\longrightarrow R^{m+1}$ inmersión difeomórfica, (U,h) entorno collar de M^{n+k} tal que $\alpha(M^{n+k+1})\subset R^m x[-1/2,\longrightarrow)$ y $\alpha(M^{n+k})\subset R^m x\{-1/2\}$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial M^{n+k+1} x[-1/2,1) \arrow[ddr, "\partial\alpha x Id"] & \\
U \arrow[u, "h"] \arrow[d, "i"'] & \\
M^{n+k+1} \arrow[r, "\alpha"] & R^{m+1}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Vamos a demostrar que $\bar{\delta}([(g^{-1}(x_0),F_g)])=0$ y al ser $\bar{\delta}$ inyectiva habremos concluido la prueba. Como $(\overline{\alpha^{-1}}^{\bullet}\circ\bar{\delta})([(g^{-1}(x_0),F_g)]) = (\bar{\delta}\circ\overline{\partial\alpha^{-1}}^{\bullet})([(g^{-1}(x_0),F_g)])$, bastará ver que $(\bar{\delta}\circ\overline{\partial\alpha^{-1}}^{\bullet})([(g^{-1}(x_0),F_g)])=0$.

Por otra parte,

$\overset{\bullet}{\overline{\partial\alpha^{-1}}}([(g^{-1}(x_0),F_g)]) = [(g\circ\partial\alpha^{-1})^{-1}(x_0),F_{g\circ\partial\alpha^{-1}})]$, por tanto, todo se reduce a demostrar que $\bar{\delta}([(g\circ\partial\alpha^{-1})^{-1}(x_0),F_{g\circ\partial\alpha^{-1}})])=0$. Por tanto podemos identificar M^{n+k+1} con $\alpha(M^{n+k+1})$, M^{n+k} con $\partial\alpha(M^{n+k})$, g con $g\circ\partial\alpha^{-1}$ y $\bar{g}$ con $\bar{g}\circ\alpha^{-1}$.

Sea $\beta:[-1/2,\longrightarrow)\longrightarrow[-1/2,\longrightarrow)$ una aplicación de clase C^∞ tal que $\beta[-1/2,1/3]=\{-1/2\}$, $\beta'(t)>0$ si $t>1/3$ y $\beta(t)=t$ si $t\geq 1$. Así, la aplicación $\tilde{g}:M^{n+k+1}\longrightarrow M^n$ definida por $\tilde{g}(x,t)=\bar{g}(x,\beta(t))$ verifica:

a) $\tilde{g}|_{\partial M^{n+k+1}} = g$.

b) $\tilde{g}^{-1}(x_0)\cap(\mathbb{R}^m\times\{t\}) = g^{-1}(x_0)\times\{t\}$ si $t\in[-1/2,1/3]$.

En consecuencia $F_{\tilde{g}}|_{g^{-1}(x_0)\times\{t\}} = F_g$ si $t\in[-1/2,1/3)$ y $\bar{\delta}([(g^{-1}(x_0),F_g)]) = [(g^{-1}(x_0)\times\{0\},(F_g,e_{m+1}))]$ $(g^{-1}(x_0)\times\{0\}\subset \mathrm{Int}(M^{n+k+1}))$.

Sea $N^{k+1}= \tilde{g}^{-1}(x_0)\cap(\mathbb{R}^m\times[0,\longrightarrow))\subset\mathbb{R}^m\times[0,M]$ (para algún $M>0$) y sea $F=F_{\tilde{g}}|_{N^{k+1}}$. Consideremos $\mathcal{U}=\{[0,1/3),(1/4,\longrightarrow)\}$ recubrimiento abierto de $[0,\longrightarrow)$ y $\{\sigma_1,\sigma_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{U}$. Suponemos $\mathrm{Int}(M^{n+k+1})\subset\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}$ según la inclusión usual de $\mathbb{R}^{m+1}$ en $\mathbb{R}^{m+2}$, y definimos para cada $t\in I$ la aplicación de clase C^∞ $\varphi_t:N^{k+1}\subset\mathrm{Int}(M^{n+k+1})\subset\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}$ por $\varphi_t(x,\lambda,0) = (x,t\sigma_2(\lambda)\lambda+(1-t)\lambda,t\lambda)$. Se verifican:

1-. $\varphi_t(N^{k+1})\subset\mathrm{Int}(M^{n+k+1})\times\mathbb{R}$. En efecto:

i) Si $(x,\lambda,0)\in N^{k+1}$ y $\lambda\in[0,1/4]$, $\varphi_t(x,\lambda,0) = (x,(1-t)\lambda,\lambda)\in\mathrm{Int}(M^{n+k+1})\times\mathbb{R}$ ya que $(1-t)\lambda\in[0,1/4]$.

ii) Si $(x,\lambda,0)\in N^{k+1}$ y $\lambda\in[1/4,1/3]$ se tiene que $\varphi_t(x,\lambda,0) = (x,t\sigma_2(\lambda)\lambda+(1-t)\lambda,t\lambda)\in\mathrm{Int}(M^{n+k+1})\times\mathbb{R}$ dado que

$t\sigma_2(\lambda)\lambda+(1-t)\lambda \in [0,1/3]$.

iii) Si $(x,\lambda,0)\in N^{k+1}$ y $\lambda\in [1/3,\longrightarrow)$, se verifica que $\varphi_t(x,\lambda,0) = (x,\lambda,t\lambda)\in \mathrm{Int}(M^{n+k+1})\times R$.

2-. φ_t es inyectiva para todo $t\in[0,1]$ y por tanto homeomorfismo sobre su imagen. En efecto:

i) Si $t=0$, $\varphi_t(x,\lambda,0) = (x,\lambda,0)$ que es claramente inyectiva.

ii) Si $t>0$ $\varphi_t(x,\lambda,0) = \varphi_t(x_1,\lambda_1,0)$ si y solamente si $\lambda_1=\lambda$ y $x_1=x$.

3-. φ_t es inmersión para cada $t\in[0,1]$. En efecto:

φ_0 claramente es una inmersión y si $t>0$ $\varphi_t|_{N^{k+1}\cap(R^m\times(1/4,\longrightarrow))}$ y $\varphi_t|_{N^{k+1}\cap(R^m\times[0,1/3)}$ también son inmersiones.

En consecuencia tenemos una familia $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ de inmersiones difeomórficas de N^{k+1} en $\mathrm{Int}(M^{n+k+1})\times R$ y $\varphi_0=\mathrm{Id}$.

Nos podemos llevar la referencia (F,e_{m+2}) hasta $\varphi_1(N^{k+1})$ y así obtener una referencia F_1. Como $\varphi_t(g^{-1}(x_0)\times\{t\}) = g^{-1}(x_0)\times\{0\}$ para todo $t\in I$, se tiene en particular que $\varphi_1(g^{-1}(x_0)\times\{0\}) = g^{-1}(x_0)\times\{0\}$ y además $\varphi_1(N^{k+1})\cap(\mathrm{Int}(M^{n+k+1})\times\{t\}) = (g^{-1}(x_0)\times\{0\})\times\{t\}$ si $t\in [0,1/4)$.

Esto significa que $[(g^{-1}(x_0)\times\{0\},F_1|_{g^{-1}(x_0)\times\{0\}})] =0$.

Sea $\sigma\colon I\longrightarrow I$ una aplicación de clase C^∞ tal que $\sigma|_{[0,1/3]}=0$, $\sigma|_{[2/3,1]}=1$ y $\sigma'(t)>0$ si $t\in(1/3,2/3)$. Definimos

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}\colon N^{k+1}\times I&\longrightarrow \mathrm{Int}(M^{n+k+1})\times R\times I\\ (y,t)&\longmapsto(\varphi(y,\sigma(t)),t)\end{aligned}$$

y construimos una referencia normal $G=\{w_1,\dots,w_{n+1}\}$ en $\tilde{\varphi}(N^{k+1}\times I)$ tal que $G|_{\tilde{\varphi}(N^{k+1}\times\{0\})} = G|_{N^{k+1}\times\{0\}} =$

$=F$, la referencia normal F_1 antes obtenida es precisamente $G|_{\varphi_1(N^{k+1})}$ y sabemos que $F_g=\{v_1,\ldots,v_n\}$ está constituida por vectores normales a $\tilde{\varphi}(N^{k+1}\times I)$ en $\tilde{\varphi}(g^{-1}(x_0)\times\{0\}\times I) = g^{-1}(x_0)\times\{0\}\times I$, por tanto si $j:g^{-1}(x_0)\times\{0\}\times I \hookrightarrow \tilde{\varphi}(N^{k+1}\times I)$ es la inclusión, $\psi_{F_g}:g^{-1}(x_0)\times\{0\}\times I\times R^n \longrightarrow j^*\nu(\tilde{\varphi}(N^{k+1}\times I))$ definida por $\psi_{F_g}((x,0,t),(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) = ((x,0,t),\lambda_1 v_1(x)+\cdots+\lambda_n v_n)$ nos induce un subfibrado $\operatorname{im}\psi_{F_g}$ de $j^*\nu(\tilde{\varphi}(N^{k+1}\times I))$. Sea η el subfibrado normal (y complementario unidimensional (y por tanto trivializable) de $\operatorname{im}\psi_{F_g}$ en $j^*\nu(\tilde{\varphi}(N^{k+1}\times I))$. Sea $v_{n+1}:g^{-1}(x_0)\times\{0\}\times I \longrightarrow \eta$ una sección no nula, tal que $v_{n+1}(x,0,0) = e_{m+2}$. Evidentemente $v_{n+1}(x,0,1) = \pm e_{m+1}$. Este argumento nos permite encontrar una aplicación C^∞ $\tilde{G}:g^{-1}(x_0)\times\{0\}\times I \longrightarrow GL(R^{n+1})$ de forma que

$$(x,0,t) \longmapsto \tilde{G}_t(x,0)$$

$$\tilde{G}_t(x,0)(v_1(x,0),\ldots,v_n(x,0),v_{n+1}(x,0,t)) =$$

$$= (w_1(x,0,t),\ldots,w_{n+1}(x,0,t)).$$

Es claro que $\tilde{G}_0=\mathrm{cte}_{\mathrm{Id}}$ y $\tilde{G}_1(v_1,\ldots,v_n,v_{n+1}) = F_1$. En consecuencia $(g^{-1}(x_0)\times\{0\}\times I,\bar{G})$, donde $\bar{G}(x,0,t) = \tilde{G}_t(x,0)(v_1(x,0),\ldots,v_n(x,0),e_{m+1})$, realiza una homología en $\operatorname{Int}(M^{n+k+1})\times I$ entre $\bar{\delta}([(g^{-1}(x_0),F_g)])$ y $\pm[(g^{-1}(x_0)\times\{0\}),F_1|_{g^{-1}(x_0)\times\{0\}})]$ de donde se deduce que $\bar{\delta}([(g^{-1}(x_0),F_g)]) = 0.$ ■

Proposición III.2.18

La condición de que la aplicación $\delta:\Pi^n(\partial M^{n+k+1})\longrightarrow\Pi^{n+1}(M^{n+k+1},\partial M^{n+k+1})$ sea inyectiva, de la proposición anterior, se cumple siempre en el caso $k=0$, $n\geq 2$, ∂M^{n+k+1} conexa y M^{n+k+1} compacta.

Demostración

Por 0.1.6 *c)* se tiene la sucesión exacta de cohomotopía

$$\longrightarrow\Pi^n(M^{n+1})\xrightarrow{j^*}\Pi^n(\partial M^{n+1})\xrightarrow{\delta}\Pi^{n+1}(M^{n+1},\partial M^{n+1})\longrightarrow .$$

Si $[f]\in \operatorname{Im} j^*$, existe $\bar{f}:M^{n+1}\longrightarrow S^n$ tal que $\bar{f}|_{\partial M^{n+1}}=f$. Así, por 0.5.7 *c)* se tiene que $d(f)=0$ y por 0.5.7 *d)*, $[f]=0$. Así, $\operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Im} j^* =0$ y δ es inyectiva.∎

El siguiente ejemplo, en el cual $n = 3 \geq k+2 = 1+2$ prueba que si $k>0$, en general, la aplicación $\delta:\Pi^n(\partial M^{n+k+1})\longrightarrow\Pi^{n+1}(M^{n+k+1},\partial M^{n+k+1})$ no es inyectivo.

Ejemplo III.2.19

Sea $\alpha:\mathbb{R}^5\longrightarrow\mathbb{R}$ la aplicación C^∞ definida por $\alpha(x,y,z,s,t) = (x^2+y^2+z^2+s^2+t^2+1/2)^2-9/4(x^2+y^2+z^2+s^2)$. Se tiene que $D\alpha(x,y,z,s,t)=0$ si y solamente si $x=y=z=s=t=0$ ó $x^2+y^2+z^2+s^2=5/8$, $t=0$. Así, $M^5= \alpha^{-1}((\leftarrow,0])$ es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^5$ cuyo borde $M^4 =\partial M^5$ es $\alpha^{-1}(0)$. Como M^5 está acotado, M^5 es una variedad compacta. Además M^4 es conexa (M^4 es unión de esferas tridimensionales situadas en el hiperplano $t=t_0$ al variar t_0 en $[-1/4,1/4]$ y todas ellas están cortadas por la circunferencia de ecuación $x=0$, $y=0$, $z=0$, $(s-3/4)^2+t^2=1/16$). La aplicación $f:\partial M^5 \longrightarrow S^3$ definida por $f(x,y,z,s,t) = \dfrac{(x,y,z,s)}{\|(x,y,z,s)\|}$

es de clase C^∞ y admite como extensión a M^5 la aplicación

$\bar{f}(x,y,z,s,t) = \dfrac{(x,y,z,s)}{\|(x,y,z,s)\|}$ que es de clase C^∞. En consecuencia,

por la exactitud de la sucesión de los grupos de cohomotopía

$$\longrightarrow \Pi^3(M^5) \xrightarrow{j^*} \Pi^3(M^4) \xrightarrow{\delta} \Pi^4(M^5,M^4) \longrightarrow$$

se tiene que $\delta([f]) = 0$. Por otra parte $[f]=0$ implica que $f \simeq C_0$ y por tanto $Id_{S^3} \simeq C_0$ (ya que $Id_{S^3} = f \circ i$, $i: S^3 \longrightarrow M^4$ $i(x,y,z,s) = (x,y,z,s,0)$) lo cual es absurdo y por consiguiente δ no es inyectiva.■

Con el fin de relacionar el grado generalizado con el grado clásico de aplicaciones propias $f:M^n \longrightarrow N^n$, donde M^n y N^n son variedades orientadas de dimensión n, sin borde y N^n conexa, damos la siguiente definición.

Definición III.2.20

Si $(M^0,F) \in S.N.R._c(M^n)$ (∂M^n posiblemente no vacío). Se define el índice de (M^0,F), y se denotará por $\mathrm{Ind}(M^0,F)$, al número entero $\mathrm{Ind}(M^0,F) = \sum_{a \in M^0} sigF(a)$, donde

$$sigF(a) = \begin{cases} +1 \text{ si } F(a) \text{ es base positiva de } T_aM^n \\ -1 \text{ si } F(a) \text{ es base negativa de } T_aM^n \end{cases}.$$

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene la siguiente proposición.

Proposición III.2.21

Si (M^0,F) y (M_1^0,F_1) son elementos de $S.N.R._c(M^n)$ homólogos (por una homología compacta) se tiene que $\mathrm{Ind}(M^0,F) = \mathrm{Ind}(M_1^0,F_1)$. En consecuencia se tiene una aplicación bien definida $i:F_c^0(M^n,\partial M^n)\longrightarrow Z$ con $i([(M^0,F)]) = \mathrm{Ind}(M^0,F)$. Además, i es suprayectiva y es biyectiva si $n\geq 2$. (Ver [29] pag. 63).

En el caso en el que la dimensión de ambas variedades coincida, la teoría del grado clásico para aplicaciones propias $f:M^n\longrightarrow N^n$ se define por $D(f) = \sum_{a\in g^{-1}(p)} sig T_a g$, donde g es una aplicación de clase C^∞ propia, homótopa a f por una homotopía propia y $p\in(\mathrm{v.r.})(g)$.

Proposición III.2.22

Si $f:M^n\longrightarrow N^n$ es una aplicación propia, se verifica que $D(f) = i(d(f))$. Además, si $N^n=S^n$, se tiene que $D(f) = i(\Pi_n^0([f]))$.

Demostración

Sea $g:M^n\longrightarrow N^n$ una aplicación C^∞ propia, homótopa a f por una homotopía propia. Así, $D(f) = D(g)$ y $d(f) = d(g)$. Para probar que $D(g) = i(d(g))$ basta observar que si $p\in(\mathrm{v.r.})(g)$ y $a\in g^{-1}(p)$, $sig T_a g=+1$ si y solamente si $T_a g:T_aM^n\longrightarrow T_pN^n$ es un isomorfismo conservando la orientación y esto es equivalente a decir que $F_g(a)$ es base positiva de T_aM^n. En consecuencia $i(d(g)) = \sum_{a\in g^{-1}(p)} sig F_g(a) = \sum_{a\in g^{-1}(p)} sig T_a g = D(g)$.

La última observación es consecuencia de la Proposición III.2.7.■

III.3 CONDICIONES PARA QUE EL GRADO GENERALIZADO DE APLICACIONES ENTRE VARIEDADES SEA UN ELEMENTO DE $\Pi_{n+k}(S^n)$.

En el párrafo anterior hemos definido el grado generalizado de una aplicación continua $f:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ como un elemento de $\mathfrak{F}^k(M^{n+k})$. La gran dificultad de esta teoría radica en la determinación de los conjuntos (grupos) $\mathfrak{F}^k(M^{n+k})$, y por tanto es de gran interés el estudio de los casos en los que se puede definir el grado generalizado como un elemento de $\Pi_{n+k}(S^n)$. Este párrafo se dedica al estudio de este problema.

Lema III.3.1

Sean $n\in\mathbb{N}$ y $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Entonces:

a) La aplicación $\varphi_{n+k}:\mathbb{R}^{n+k}\longrightarrow S^{n+k}\setminus\{q\}$ induce una aplicación biyectiva $\bar{\varphi}_{n+k}:\mathfrak{F}^k_c(\mathbb{R}^{n+k})\longrightarrow\mathfrak{F}^k_c(S^{n+k})=\mathfrak{F}^k(S^{n+k})$ dada por $\bar{\varphi}_{n+k}([(M^k,F)]) = [(\varphi_{n+k}(M^k),T\varphi_{n+k}(F))]$.

b) El difeomorfismo de clase C^∞, $\psi:\mathbb{R}^{n+k}\longrightarrow B^{n+k}(0)$ definido por $\psi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$, induce una aplicación biyectiva $\bar{\psi}^*:\mathfrak{F}^k(B^{n+k}(0))\longrightarrow\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^{n+k})$ (III.1.12 *a*)) y una aplicación biyectiva $\bar{\psi}^*_c:\mathfrak{F}^k_c(B^{n+k}(0))\longrightarrow\mathfrak{F}^k_c(\mathbb{R}^{n+k})$ (III.1.12 *b*)).

Demostración

a) El único problema es la suprayectividad de $\bar{\varphi}_{n+k}$, la cual se obtiene del hecho de que todo elemento $[(M^k,F)]\in\mathfrak{F}^k(S^{n+k})$ tiene un representante (M'^k,F') tal que $q\notin M'^k$.

$b)$ Consecuencia inmediata de III.1.13.∎

Consideramos ahora M^n una variedad de clase C^∞, T_2, compacta, conexa, sin borde, orientada de dimensión n $(n\geq 2)$ y $f:M^n\longrightarrow S^n$ una aplicación continua. Sabemos que existe $g:M^n\longrightarrow S^n$ aplicación homótopa a f de clase C^∞ tal que $p\in(\text{v.r.})(g)$. Según lo establecido en la sección 0.5, se define $D(f) = D(g) = \sum_{i=1}^{r} sigJ(\varphi_n^{-1}\circ g\circ\psi_i^{-1})(\psi_i(a_i))$, donde $\{a_1,\ldots,a_r\}=g^{-1}(p)$ y $c_i=(U_i,\psi_i,\mathbb{R}^n)$ son cartas, de la orientación de M^n, con $a_i\in U_i$ para todo $i\in\{1,\ldots,r\}$. Al ser $\dim g^{-1}(p)=0$, podemos encontrar una isotopía de clase C^∞ $H:M^n\times I\longrightarrow M^n$ tal que $H_0=\text{Id}$ y $H_1(\{b_1,\ldots,b_r\})=\{a_1,\ldots,a_r\}$ siendo $\{b_1,\ldots,b_r\}$ un conjunto de puntos contenido en U, dominio de una carta fija $c=(U,\psi,\mathbb{R}^n)$ (vease [17], pag. 180). Si definimos $g\circ H:M^k\times I\longrightarrow S^n$, obtenemos una homotopía entre g y $g\circ H_1=h$. Se tiene que $h^{-1}(p)=H_1^{-1}(g^{-1}(p))$, $H_1^{-1}(\{a_1,\ldots,a_r\})=\{b_1,\ldots,b_r\}\subset U$ y es claro que $D(f) = D(g) = D(h) = \sum_{i=1}^{r} sigJ(\varphi_n^{-1}\circ h\circ\psi^{-1})(\psi(b_i))$ $(p\in(\text{v.r.})(h))$. Para cada $b_i\in h^{-1}(p)$, $T_{b_i}h:T_{b_i}M^n\longrightarrow T_pS^n$ es un isomorfismo y $sigJ(\varphi_n^{-1}\circ h\circ\psi^{-1})(\psi(b_i))=1$ si y solamente si $F_h(b_i)$ es base positiva de $T_{b_i}M^n$ (observemos que en este caso el espacio normal a $\{b_1,\ldots,b_r\}$ en b_i es $T_{b_i}M^n$ para cada $i\in\{1,\ldots,r\}$. Hemos visto pues, que $D(h) = \sum_{i=1}^{r} sigF_h(b_i) = i(\Pi_n^0([f]))$, donde

$$sigF_h(b_i)=\begin{cases} +1 \text{ si } F_h(b_i) \text{ es base positiva de } & T_{b_i}M^n \\ -1 \text{ si } F_h(b_i) \text{ es base negativa de } & T_{b_i}M^n \end{cases}.$$ Además,

$D(h)$ caracteriza la clase de homotopía de h (0.5.7). Esto nos permite definir un isomorfismo $\psi^{\bullet-1}:\mathfrak{J}^0(M^n)\longrightarrow\mathfrak{J}^0_n(R^n)\xrightarrow{\bar{\varphi}_n}\mathfrak{J}^0(S^n)$ por $\psi^{\bullet-1}([\{a_1,\ldots,a_r\},F]) = \bar{\varphi}_n([(\psi(\{a_1,\ldots,a_r\}),T\psi F)])$ donde $T\psi F(\psi(a_i)) = T_{a_i}\psi(F(a_i))$ y $[(\{a_1,\ldots,a_r\},F)]$ es un representante del elemento de $\mathfrak{J}^0(M^n)$ con $\{a_1,\ldots,a_r\}$ contenido en el dominio U de ψ.

Según lo visto anteriormente, $\psi^{\bullet}$ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi_n(S^n) \arrow[r, "\Pi^0_n", "\approx"'] \arrow[drr, "\tilde{d}"'] & \mathfrak{J}^0(S^n) \arrow[r, "\psi^{\bullet}"] \arrow[dr, "i"] & \mathfrak{J}^0(M^n) \arrow[d, "i"'] & \Pi^n(M^n) \arrow[l, "\Pi^0_n"', "\approx"] \arrow[dl, "D"] \\
 & & Z &
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{d}([\alpha]) = D(\alpha)$. Por tanto, podríamos entender el grado de f, $D(f)$, como $D(f) = ((\Pi^0_n)^{-1}\circ\psi^{\bullet-1}\circ\Pi^0_n)([f])\in\Pi_n(S^n) \overset{\tilde{d}}{\approx} Z$.

Incluso en el caso de tener $f:M^n\longrightarrow N^n$ aplicación continua, donde N^n es otra variedad orientada, conexa, de dimensión n, compacta, sin borde; $d(f) = d(h)$, donde $h:M^n\longrightarrow N^n$ es una aplicación C^∞ homótopa a f con $r\in(\text{v.r.})(h)$. La conmutatividad del diagrama anterior y la Prop. III.2.2 permite interpretar $D(f) = D(h)$ como $(\Pi^0_n)^{-1}\circ\psi^{\bullet-1}([(h^{-1}(r),F_h)])\in\Pi_n(S^n)$.

Continuando con estas ideas podemos considerar la siguiente generalización:

Sea $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y $n\in\mathbb{N}$. Sean M^{n+k} una variedad de clase C^{∞},. compacta, orientada, conexa con o sin borde y $c=(U,\psi^{-1},R^{n+k})$ una carta de la orientación de M^{n+k} de manera que $\psi:\overline{B}^{n+k}(0)\longrightarrow\overline{U}\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$. Como $\mathfrak{Z}^{k}(S^{n+k})\cong\mathfrak{Z}_{c}^{k}(R^{n+k})\cong\mathfrak{Z}_{c}^{k}(B^{n+k}(0))$ (ver III.3.1), se puede definir $\psi^{*}:\mathfrak{Z}^{k}(S^{n})\longrightarrow\mathfrak{Z}^{k}(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ por $\psi^{*}([(M^{k},F)]) = [(\psi(M^{k}),\overline{T\psi}(F))]$, entendiendo por $\overline{T\psi}:\nu(M^{k})\longrightarrow\nu(\psi(M^{k}))$ la aplicación inducida por

$$T\psi:T_{M^k}B^{n+k}(0)\longrightarrow T_{\psi(M^{k})}M^{n+k}$$
$$(x,v)\longmapsto(\psi(x),T_{x}\psi(v))$$

sobre los espacios normales a M^{k} y $\psi(M^{k})$.

$$\overline{T\psi}:\nu(M^{k})\longrightarrow\nu(\psi(M^{k}))$$
$$(x,[v])\longmapsto(\psi(x),[T_{x}\psi(v)])$$

. Es claro que $\overline{T\psi}$ es ψ-isomorfismo.

ψ^{*} está bien definida. En efecto: supongamos que (M^{k},F) y (M'^{k},F') son homólogas y que (M^{k+1},G) realiza la homología entre ellas. Por tanto, $M^{k+1}\subset B^{n+k}(0)\mathrm{x}I$, $M^{k+1}\cap(B^{n+k}(0)\mathrm{x}\{t\}) = M^{k}\mathrm{x}\{t\}$ si $t\in[0,1/3)$ y $M^{k+1}\cap(B^{n+k}(0)\mathrm{x}\{t\}) = M'^{k}\mathrm{x}\{t\}$ si $t\in(2/3,1]$ y $G|_{M^{k+1}\cap(B^{n+k}(0)\mathrm{x}\{0\})}=F$ y $G|_{M^{k+1}\cap(B^{n+k}(0)\mathrm{x}\{1\})}=F'$.

Consideremos $\psi\mathrm{x}\mathrm{Id}:B^{n+k}(0)\mathrm{x}I\longrightarrow\mathrm{Int}(M^{n+k})\mathrm{x}I$ y $\overline{T\psi\mathrm{x}\mathrm{Id}}$ el isomorfismo entre $\nu(M^{k+1})$ y $\nu((\psi\mathrm{x}\mathrm{Id})(M^{k+1}))$ definido de la misma manera que $\overline{T\psi}$. Tomamos $((\psi\mathrm{x}\mathrm{Id})(M^{k+1}),\overline{T\psi\mathrm{x}\mathrm{Id}}(G))$, evidentemente este par realiza una homología entre $(\psi(M^{k}),\overline{T\psi}(F))$ y $(\psi(M'^{k}),\overline{T\psi}(F'))$ dado que $\overline{T\psi\mathrm{x}\mathrm{Id}} = \overline{T\psi}$ en M^{k} y M'^{k}.

Por otra parte, como ψ transforma la unión disjunta de variedades en unión disjunta de variedades, se tiene que ψ^{*} es un homomorfismo si $n\geq k+2$.

A continuación, vamos a establecer una proposición que nos será de gran utilidad mas adelante.

Lema III.3.2 ([17], pag. 185)

Consideremos M^{n+k} como antes. Sean $\psi',\psi:\bar{B}^{n+k}(0)\longrightarrow M^{n+k}$ tales que $\psi'(\bar{B}^{n+k}(0))\subset \mathrm{Int}(M^{n+k})$ y $\psi(\bar{B}^{n+k}(0))\subset \mathrm{Int}(M^{n+k})$. Si ψ' y ψ son difeomorfismos sobre su imagen, conservando la orientación, se verifica que existe una isotopía $H:M^{n+k}\times I\longrightarrow M^{n+k}$ tal que $H_0=\mathrm{Id}$ y $H_1|_U=\psi'\circ\psi^{-1}$, donde $U=\psi(B^{n+k}(0))$.

Proposición III.3.3

Si $c=(U,\psi^{-1},R^{n+k})$ y $c'=(U',\psi'^{-1},R^{n+k})$ son dos cartas de la orientación de M^{n+k} con $\psi:\bar{B}^{n+k}(0)\longrightarrow \bar{U}\subset \mathrm{Int}(M^{n+k})$ y $\psi':\bar{B}^{n+k}(0)\longrightarrow \bar{U}'\subset \mathrm{Int}(M^{n+k})$, se tiene que $\psi^{*}=\psi'^{*}$.

Demostración

Consideremos $H:M^{n+k}\times I\longrightarrow M^{n+k}$ como en el Lema III.3.2 y sea $\alpha: I\longrightarrow I$ una aplicación de clase C^{∞} con $\alpha|_{[0,1/3)}=0$, $\alpha|_{(2/3,1]}=1$ y $\alpha'(t)>0$ si $t\in(1/3,2/3)$. Definimos $\tilde{H}:M^{n+k}\times I\longrightarrow M^{n+k}\times I$ por $\tilde{H}(x,t) = (H(x,\alpha(t)),t)$. Se tiene que $\tilde{H}$ es un difeomorfismo de clase C^{∞}. Si $[(M^{k},F)]\in\mathfrak{J}^{k}(S^{n+k})$, $\tilde{H}(\psi(M^{k})\times I)$ es una subvariedad compacta de $M^{n+k}\times I$, contenida en $\mathrm{Int}(M^{n+k})\times I$, tal que $\tilde{H}(\psi(M^{k})\times I)\cap(\mathrm{Int}(M^{n+k})\times\{t\}) = \psi(M^{k})\times\{t\}$ si $t\in[0,1/3)$ y

$\tilde{H}(\psi(M^k)\times I)\cap(\mathrm{Int}(M^{n+k})\times\{t\}) = \psi'(M^k)\times\{t\}$ si $t\in(2/3,1]$. Es claro que $\overline{T\psi}(F)$ es una referencia normal para $\psi(M^k)\times I$, por tanto si $\overline{T\tilde{H}}:\nu(\psi(M^k)\times I)\longrightarrow\nu(\tilde{H}(\psi(M^k)\times I))$ es el isomorfismo definido por $\overline{T\tilde{H}}(x,[v]) = (\tilde{H}(x),[T_x\tilde{H}(v)])$, $\overline{T\tilde{H}}(\overline{T\psi}(F))$ nos da una referencia para $\tilde{H}(\psi(M^k)\times I)$. El par $(\tilde{H}(\psi(M^k)\times I),\overline{T\tilde{H}}(\overline{T\psi}(F))$ realiza una homología entre $(\psi(M^k),\overline{T\psi}(F))$ y $(\psi'(M^k),\overline{T\psi'}(F))$ (ya que $\overline{T\psi'}\circ\overline{T\psi}^{-1} = \overline{T(\psi'\circ\psi^{-1})}$) concluyéndose que $\psi^{\bullet}=\psi'^{\bullet}$.∎

Nuestro próximo objetivo es el estudio de las propiedades de $\psi^{\bullet}$. Estudiamos en qué condiciones es un epimorfismo, monomorfismo etc.. En esta dirección establecemos la siguiente proposición.

Proposición III.3.4 ([17], pag. 183)

Sean M^{n+k} en las condiciones anteriores, con M^{n+k} k-conexa, $n\geq k+2$ y $\partial M^{n+k}=\emptyset$, y M^k y $M^k_{\bullet}$ subvariedades compactas difeomorfas de M^{n+k}, de dimensión k. Entonces, existe una isotopía $H:M^{n+k}\times I\longrightarrow M^{n+k}$ con $H_0=\mathrm{Id}$ y $H_1(M^k_{\bullet})=M^k$. (No es necesaria la compacidad de M^{n+k}).

Proposición III.3.5

Sea M^{n+k} como antes con $n\geq k+2$ y $\partial M^{n+k}=\emptyset$. Si M^{n+k} es k-conexa, se verifica que $\psi^{\bullet}$ es un epimorfismo.

Demostración

Sea $[(M^k,F)]\in\mathfrak{J}^k(M^{n+k})$ y $f:M^{n+k}\longrightarrow S^n$ una aplicación de clase C^{∞} con $p\in(\mathrm{v.r.})(f)$ y $\Pi^k_n([f]) = [(M^k,F)]$. Como $n\geq k+2$, M^k se puede

sumergir en U, donde U es el dominio de una carta $c=(U,\psi^{-1},\mathbb{R}^{n+k})$ de la orientación de M^{n+k} y $\psi:\bar{B}^{n+k}(0)\longrightarrow\bar{U}\subset Int(M^{n+k})$. Sea M_*^k la imagen de dicha inmersión. En virtud del Lema III.3.4, existe una isotopía $H:M^{n+k}\times I\longrightarrow M^{n+k}$ verificando $H_0=Id$ y $H_1(M_*^k)=M^k$. La aplicación $f\circ H:M^{n+k}\times I\longrightarrow S^n$ nos da una homotopía entre f y $f\circ H_1=f'$, y por tanto
$[(M^k,F)] = \Pi_n^k([f]) = \Pi_n^k([f']) = [(f'^{-1}(p),F_{f'})]$.

Como $f'^{-1}(p)=M_*^k$, se tiene que $\psi^*([(\psi^{-1}(M_*^k),\overline{T\psi}^{-1}(F_{f'}))]) = [(M^k,F)]$ y por lo tanto ψ^* es un epimorfismo. ∎

Consecuencias III.3.6

a) *Grado generalizado para aplicaciones continuas* $f:M^{n+1}\longrightarrow M^n$, *donde* M^{n+1} *y* M^n *son variedades orientadas, compactas, conexas, sin borde, de dimensiones* $n+1$ *y* n *respectivamente, con* $n\geq 3$ *y* M^{n+1} *simplemente conexa (es decir, 1-conexa).*

Si M^{n+1} es una variedad en las condiciones anteriores se tiene que $\Pi_1(M^{n+1})=0$ y por tanto $H_1(M^{n+1};\mathbb{Z})=0$.

Por el teorema de coeficientes universales se tiene una sucesión exacta

$$0\longrightarrow H_1(M^{n+1};\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}_2\longrightarrow H_1(M^{n+1};\mathbb{Z}_2)\longrightarrow Tor(H_0(M^{n+1};\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)\longrightarrow 0$$

por tanto, como $H_0(M^{n+1};\mathbb{Z})$ es libre $Tor(H_0(M^{n+1};\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)=0$. Así, $H_1(M^{n+1};\mathbb{Z}_2)=0$. Como consecuencia del Teorema de Dualidad de Poincaré $H^n(M^{n+1};\mathbb{Z}_2)\approx H_1(M^{n+1};\mathbb{Z}_2)=0$. Ahora enunciamos el siguiente teorema.

Teorema ([33], pag. 461))

Existe una aplicación $\Phi:[X;S^n]\longrightarrow H^n(X;\mathbb{Z}_2)$, siendo X un CW-complejo de dimensión menor o igual que $n+1$, que verifica que para cada $u\in H^n(X;\mathbb{Z}_2)$, $\Phi^{-1}(u)$ tiene el mismo número de elementos que $H^{n+1}(X;\mathbb{Z}_2)/Sq^2(\mu_*(H^{n-1}(X;\mathbb{Z})))$ ($\mu:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}_2$ es el epimorfismo canónico).

Así pues, en el caso de la variedad M^{n+1}, $\Phi^{-1}(0) = \Phi^{-1}(H^n(M^{n+1};\mathbb{Z})) = [M^{n+1};S^n]$ y $\Phi^{-1}(0)$ tiene el mismo número de elementos que
$H^{n+1}(M^{n+1};\mathbb{Z}_2)/Sq^2(\mu_*(H^{n-1}(M^{n+1};\mathbb{Z}))) \approx \mathbb{Z}_2/Sq^2(\mu_*(H^{n-1}(M^{n+1};\mathbb{Z})))$.

Por tanto, $[M^{n+1};S^n] \approx \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \\ 0 \end{cases}$. Siendo $\mathbb{Z}_2$ si $M^{n+1}=S^{n+1}$ y 0 si $M^{n+1}=P^2(\mathbb{C})$.

En virtud de la Prop. III.3.5 tenemos un epimorfismo $\psi^*:\mathfrak{J}^1(S^{n+1})\longrightarrow\mathfrak{J}^1(M^{n+1})$. Ahora, $\mathfrak{J}^1(S^{n+1})$ es isomorfo a $\Pi^n(S^{n+1}) = \Pi_{n+1}(S^n) \approx \mathbb{Z}_2$. Por tanto, ψ^* es un isomorfismo si $\mathfrak{J}^1(M^{n+1})\neq 0$ (lo cual es equivalente a que $\Pi^n(M^{n+1})\neq 0$).

Supongamos primero que $M^n=S^n$. Si $\Pi^n(M^{n+1})=0$, toda aplicación continua $f:M^{n+1}\longrightarrow S^n$ es homótopa a una constante, por tanto el único grado posible es el constante de valor 0 para toda $f:M^{n+1}\longrightarrow S^n$ aplicación continua. Por tanto supongamos que $\Pi^n(M^{n+1})\neq 0$. En estas condiciones, tenemos una sucesión de isomorfismos

$$\Pi_{n+1}(S^n)=\Pi^n(S^{n+1})\xrightarrow{\Pi^1_n}\mathfrak{J}^1(S^{n+1})\xrightarrow{\psi^\bullet}\mathfrak{J}^1(M^{n+1})\xleftarrow{\Pi^1_n}\Pi^n(M^{n+1}).$$

Si $f:M^{n+1}\longrightarrow S^n$ es una aplicación continua se puede interpretar el grado de f, $d(f)$, como $((\Pi^1_n)^{-1}\circ\psi^\bullet\circ\Pi^1_n)([f])\in\Pi_{n+1}(S^n)$. Evidentemente $d(f)$ carateriza la clase de homotopía de f.

Si M^n es una variedad en las condiciones anteriores y $f:M^{n+1}\longrightarrow M^n$ es una aplicación continua, la sucesión de isomorfismos anteriores, nos permite interpretar el grado de f, $d(f),\in\mathfrak{J}^1(M^{n+1})$ (III.2.5), como $((\Pi^1_n)^{-1}\circ\psi^\bullet)(d(f))\in\Pi_{n+1}(S^n)$. Así, si se toma $g:M^{n+1}\longrightarrow M^n$ aplicación de clase C^∞, $s\in M^n$ un valor regular de g, g homótopa a f, se tiene que
$d(f) = d(g) = ((\Pi^1_n)^{-1}\circ\psi^\bullet)([(g^{-1}(s),F_g)])$.

Ahora solo podemos asegurar que $d(f)$ es un invariante de la clase de homotopía de f, aunque en general no la caraterize. Ocurre lo mismo que en el grado para aplicaciones continuas entre variedades de la misma dimensión.

Según estos argumentos, es interesante tener condiciones que nos aseguren cuando $\Pi^n(M^{n+1})\neq0$. Como veremos posteriormente (vease III.3.8) si M^{n+1} se puede sumergir en R^{n+k}, para algún $k\in N$, con fibrado normal trivializable, se verifica que $\Pi^n(M^{n+1})\neq0$, en particular esto ocurre si M^{n+1} se puede sumergir en R^{n+2}.■

b) Si M^{n+k} es k-conexa, $\Pi^n(M^{n+k})\neq0$ y $\Pi_{n+k}(S^n)\approx Z_2$ $n\geq k+2$, también $\psi^\bullet$ es un isomorfismo y todo lo establecido en a) se puede transladar a esta situación.

Ahora vamos a introducir el concepto de *π-variedad*, con el fin de estudiar con mayor profundidad las propiedades de ψ^{*}.

Definición III.3.7 ([21])

Sea M una variedad diferenciable de clase C^{∞}. Diremos que M es una π-variedad si existen $m\in\mathbb{N}$ y $f:M\longrightarrow R^{m}$ inmersión difeomórfica C^{∞} de manera que $\nu(f(M))$ es trivializable.

Vamos a ver que el grado de variedades introducido en 0.5 y en III.2 puede ser interpretado como un elemento de $\Pi_{n+s}(S^{n+s})$ para algún $s\in\mathbb{N}$, en el caso de las π-variedades.

Supongamos que M^{n} es una π-variedad compacta con $\dim M^{n}=n$ y $\partial M^{n}=\emptyset$. Sea $f:M^{n}\longrightarrow R^{n+s}$ una inmersión difeomórfica C^{∞} tal que $\nu(f(M^{n}))$ es trivializable. Podemos tomar $U=\{u_{1},\ldots\ldots,u_{s}\}$ familia de secciones de clase C^{∞}, linealmente independientes, de $\nu(f(M^{n}))$. Mediante f y U podemos orientar a M^{n} de manera estándar (como consecuencia toda π-variedad es orientable). Sea $h:M^{n}\longrightarrow S^{n}$ una aplicación continua y $g:M^{n}\longrightarrow S^{n}$ una aplicación C^{∞} homótopa a h con $p\in(\text{v.r.})(g)$. Se tiene que $\Pi_{n}^{0}([h]) = \Pi_{n}^{0}([g]) = [(g^{-1}(p),F_{g})]$. Es claro que $g^{-1}(p)$ es un conjunto finito de puntos $\{a_{1},\ldots\ldots,a_{r}\}$ de M^{n} y $D(h) = D(g) = \sum_{i=1}^{r} sigF_{g}(a_{i}) = I(\Pi_{n}^{0}([h]))$ (III.2.21) donde

$$sigF_{g}(a_{i}) = \begin{cases} +1 & \text{si } F_{g}(a_{i}) \text{ es base positiva} \\ -1 & \text{si } F_{g}(a_{i}) \text{ es base negativa} \end{cases}.$$

Pero según la orientación construida en M^{n}, $F_{g}(a_{i})$ es base positiva de $T_{a_{i}}M^{n}$ si y solamente si

$\{T_{a_1}f(F_g(a_1)),u_1(f(a_1)),\ldots,u_s(f(a_1))\}$ es base positiva de $T_{f(a_1)}R^{n+s}$. Como consecuencia, se tiene que

$$D(h) = D(g) = \sum_{i=1}^{n} sig(T_{a_i}f(F_g(a_i)),u_1(f(a_i)),\ldots,u_s(f(a_i))).$$

Así pues, se obtiene un homomorfismo $U^\bullet_f:\mathfrak{F}^0(M^n)\longrightarrow\mathfrak{F}^0_c(R^{n+s})\xrightarrow{\bar{\varphi}_{n+s}}\mathfrak{F}^0(S^{n+s})$ definido por

$U^\bullet_f([(\{a_1,\ldots,a_r\},F)]) = \bar{\varphi}_{n+s}([(\{f(a_1),\ldots,f(a_r)\},(Tf(F),U))])$

que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi^n(M^n) \arrow[r, "\Pi^0_n"] \arrow[drr, "D"'] & \mathfrak{F}^0(M^n) \arrow[r, "U^\bullet_f"] \arrow[dr, "i"] & \mathfrak{F}^0(S^{n+s}) \arrow[d, "i"] & \Pi_{n+s}(S^{n+s}) \arrow[l, "\Pi^0_{n+s}"'] \arrow[dl, "D"] \\
 & & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

de donde se deduce que $U^\bullet_f$ es un isomorfismo. Por tanto, podríamos interpretar $D(h) = D(g)$ como $\Pi^{-1}_{n+s}(U^\bullet_f(\Pi^0_n([h]))) \in \Pi_{n+s}(S^{n+s})$.

Utilizando estas ideas podemos construir homomorfismos análogos a $U^\bullet_f$ en otros casos.

Sea M^{n+k} una π-variedad compacta, $n\geq k+2$, con $\partial M^{n+k}=\emptyset$ ó $\partial M^{n+k}\neq\emptyset$. Sean $f:M^{n+k}\longrightarrow R^{n+k+s}$ una inmersión difeomórfica de clase C^∞ tal que $\nu(f(M^{n+k}))$ sea trivializable, y $U=\{u_1,\ldots,u_s\}$ familia de secciones C^∞, linealmente independientes de $\nu(f(M^{n+k}))$. Orientamos M^{n+k} mediante f y U. Se puede definir un homomorfismo

$U_f^{\bullet}:\mathfrak{F}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow\mathfrak{F}_c^k(R^{n+k+s})\overset{\bar{\varphi}_{n+k+s}}{\cong}\mathfrak{F}^k(S^{n+k+s})$ por $U_f^{\bullet}([(M^k,F)])=[(f(M^k),(\overline{Tf}(F),U))]$ donde $\overline{Tf}:\nu(M^k)\longrightarrow\nu(f(M^k))$ es la aplicación obtenida pasando al cociente Tf, es decir, $\overline{Tf}(x,[v])=(f(x),[T_xf(v)])$ ($\nu(f(M^k))$ denota el fibrado normal de $f(M^k)$ en $f(M^{n+k})$). Evidentemente, $U_f^{\bullet}$ es una aplicación que está bien definida, que además es un homomorfismo.

Si $g:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ es una aplicación continua y $\partial M^{n+k}=\partial M^n=\emptyset$, podemos interpretar el grado de g, $d(g)\in\mathfrak{F}^k(M^{n+k})$ (III.2.5) como $((\Pi_{n+k+s})^{-1}\circ U_f^{\bullet})(d(g))\in\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$. Así, si se toma $h:M^{n+k}\longrightarrow M^n$ homótopa a g con h de clase C^{∞} y $r\in(\text{v.r.})(h)$, se tiene que $d(g)$ se puede interpretar como $((\Pi^k_{n+k+s})^{-1}\circ U_f^{\bullet})([(h^{-1}(r),F_h)])\in\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$. Esta interpretación del grado de g como un elemento de $\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})$ presenta el inconveniente de depender de f y de U. Vamos a estudiar las condiciones que ha de verificar M^{n+k} para que $U_f^{\bullet}$ no dependa ni de U ni de f, así como la relación existente entre $\psi^{\bullet}$ y $U_f^{\bullet}$. A continuación establecemos una proposición que mas tarde será mejorada. Como consecuencia de ella se obtiene que si M^{n+1} es una π-variedad, $\Pi^n(M^{n+1},\partial M^{n+1})\neq 0$, como ya habíamos anunciado en III.3.6.

Proposición III.3.8

Sean M^{n+1} una π-variedad compacta, $n\geq 3$, $f:M^{n+1}\longrightarrow R^{n+s+1}$ una inmersión difeomórfica y $U=\{u_1,\dots,u_s\}$ familia de secciones de clase C^{∞}, linealmente independientes, de $\nu(f(M^{n+1}))$. En estas condiciones, $U_f^{\bullet}:\mathfrak{F}^1(M^{n+1},\partial M^{n+1})\longrightarrow\mathfrak{F}_c^1(R^{n+s+1})\cong\mathfrak{F}^1(S^{n+s+1})$ es un epimorfismo y por tanto $\Pi^n(M^{n+1},\partial M^{n+1})\neq 0$.

Demostración

Sea $c=(V,\varphi,\mathbb{R}^{n+s+1})$ una carta adaptable a $\mathrm{Int}(f(M^{n+1}))$, $\varphi(V\cap\mathrm{Int}(f(M^{n+1}))) = \varphi(V)\cap(\mathbb{R}^{n+1}\times\{0\})$. Podemos suponer que $\varphi(V)$ es una bola centrada en O. Consideremos $S^1\subset\varphi(V)\cap(\mathbb{R}^{n+1}\times\{0\}) = B_{\varepsilon}^{n+1}(O)$ y $V=\{v_1,\dots,v_{n+s}\}$ referencia normal de $\varphi^{-1}(S^1)$ de manera que $[(\varphi^{-1}(S^1),V)]=1\in\Pi_{n+s+1}(S^{n+s})$. Como $\varphi^{-1}(S^1)$ tiene fibrado normal trivializable en $f(M^{n+1})$ podemos tomar $W=\{w_1,\dots,w_n\}$ referencia normal para $\varphi^{-1}(S^1)$ en $f(M^{n+1})$. Identificaremos w_i con $(Tj\circ Tf)(w_i)$ donde $j:f(M^{n+1})\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+s+1}$ es la inclusión. Es claro que cada v_i se puede escribir como combinación lineal de elementos de W y U, por tanto, $v_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x)w_j(x) + \sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}(x)u_j(x)$. Podemos construir una aplicación de clase C^∞ $G:\varphi^{-1}(S^1)\longrightarrow GL_+(\mathbb{R}^{n+s})$ definida por $G(x)=G_x$, donde G_x es el automorfismo de $\mathbb{R}^{n+s}$ con matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1\,1}(x) & \cdots\cdots & \alpha_{1\,n}(x) & \beta_{1\,1}(x) & \cdots\cdots & \beta_{1\,s}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n+s\,1}(x) & \cdots\cdots & \alpha_{n+s\,n}(x) & \beta_{n+s\,1}(x) & \cdots\cdots & \beta_{n+s\,s}(x) \end{pmatrix}$$

(si $G(\varphi^{-1}(S^1))\subset GL_-(\mathbb{R}^{n+s})$ basta con cambiar w_1 de signo y escribir los v_j en función de $\{-w_1,\dots,w_n,u_1,\dots,u_s\}$). Según [29] (pag. 85), existe una homotopía $H:\varphi^{-1}(S^1)\times I\longrightarrow GL_+(\mathbb{R}^{n+s})$ de clase C^∞ verificando $H_0=G$ y

$$H_1(x) = \left(\begin{array}{c:c} P(X) & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots {}^{(s} & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right),$$ por tanto si

$H(w_1,\dots\dots,w_n,u_1,\dots\dots,u_s)$ denota la familia de secciones C^∞ del fibrado normal de $\varphi^{-1}(S^1)\times I$ en $R^{n+s+1}\times I$ con

$$H(w_1,\dots\dots,w_n,u_1,\dots\dots,u_s)(x,t) = H(x,t)\begin{pmatrix} w_1(x) \\ \vdots \\ w_n(x) \\ u_1(x) \\ \vdots \\ u_s(x) \end{pmatrix}$$ se tiene que

$(\varphi^{-1}(S^1)\times I, H(w_1,\dots\dots,w_n,u_1,\dots\dots,u_s))$ realiza una homología entre $(\varphi^{-1}(S^1),\{v_1,\dots\dots,v_{n+s}\})$ y $(\varphi^{-1}(S^1),\{z_1,\dots\dots,z_n,u_1,\dots\dots,u_s\})$ donde $\{z_1,\dots\dots,z_n\}$ son combinaciones lineales de los elementos de $W=\{w_1,\dots\dots,w_n\}$. Por tanto

$[(f^{-1}(\varphi^{-1}(S^1)),\overline{Tf}^{-1}(\{z_1,\dots\dots,z_n\}))] \in \mathfrak{J}^1(M^{n+1})$ y

$U_f^\bullet([(f^{-1}(\varphi^{-1}(S^1)),\overline{Tf}^{-1}(\{z_1,\dots\dots,z_n\}))]) =$

$= [(\varphi^{-1}(S^1),\{z_1,\dots\dots,z_n,u_1,\dots\dots,u_s\}) = [(\varphi^{-1}(S^1),\{v_1,\dots\dots,v_{n+s}\})]$

$= 1\in\mathfrak{J}^1(S^{n+s+1})$. ∎

A continuación vamos a demostrar algunas proposiciones que determinarán la relación existente entre $\psi^\bullet$ y $U_f^\bullet$ para π-variedades.

Proposición III.3.9

Sean M^{n+k} una π-variedad k-conexa, $n\geq k+2$, $f:M^{n+k}\longrightarrow R^{n+k+s}$ una inmersión difeomórfica de clase C^{∞} tal que $\nu(f(M^{n+k}))$ sea trivializable y $U=\{u_1,\dots,u_s\}$, $V=\{v_1,\dots,v_s\}$ dos familias de secciones de clase C^{∞}, linealmente independientes, de $\nu(f(M^{n+k}))$ que den la misma orientación en M^{n+k}. Se verifica que los homomorfismos U_f^{*} , $V_f^{*}:\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})\longrightarrow\mathfrak{J}_c^k(R^{n+k+s}) \cong \mathfrak{J}^k(S^{n+k+s})$ son idénticos.

Demostración

Sea $[(M^k,F)]\in\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$ con $M^k\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$. Hemos de demostrar que $[(f(M^k),(\overline{Tf}(F),U))] = [(f(M^k),(\overline{Tf}(F),V))]$. Si escribimos u_j en función de $\{v_1,\dots,v_s\}$ para cada $j\in\{1,\dots,s\}$, obtenemos $u_j(x) = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}(x)v_j(x)$ para cada $x\in f(M^{n+k})$. Se puede definir $G:f(M^{n+k})\longrightarrow GL_+(R^s)$ de clase C^{∞} por $G(x)=G_x$, donde G_x es el automorfismo de R^s de matriz $(a_{ij}(x))_{i,j=1}^{s}$. Es claro que $G(v_1,\dots,v_s) = (u_1,\dots,u_s)$. Ahora consideremos la siguiente composición de aplicaciones $G|_{f(M^k)}:f(M^k)\xhookrightarrow{i}f(M^{n+k})\xrightarrow{G}GL_+(R^s)$. Como i es homótopa a una constante, también lo es $G|_{f(M^k)}$ y por tanto existe una aplicación de clase C^{∞} $H:f(M^k)\times I\longrightarrow GL_+(R^s)$ tal que $H_0=G|_{f(M^k)}$ y $H_1=\mathrm{cte}_{Id}$. Evidentemente, $(f(M^k)\times I,(\overline{Tf}(F),H(v_1,\dots,v_s))$ realiza una homología entre $(f(M^k),(\overline{Tf}(F),U))$ y $(f(M^k),(\overline{Tf}(F),V))$ de donde se deduce que $U_f^{*}([(M^k,F)]) = V_f^{*}([(M^k,F)])$. ∎

Proposición III.3.10

Sean M^{n+k} una π-variedad compacta, $g,f:M^{n+k}\longrightarrow R^{n+k+s}$ dos inmersiones difeomórficas tales que $\nu(f(M^{n+k}))$ y $\nu(g(M^{n+k}))$ son trivializables, U y U' dos familias de secciones de clase C^∞, linealmente independientes, de $\nu(f(M^{n+k}))$ y $\nu(g(M^{n+k}))$ respectivamente y $c=(W,\psi^{-1},R^{n+k})$ una carta de M^{n+k} donde $\psi:\overline{B}^{n+k}(0)\longrightarrow\overline{W}\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$. Si $n\geq k+2$ y $s\geq n+k+2$ se verifica que los homomorfismos ${U'_g}^{\bullet}|_{\mathrm{Im}\psi^\bullet}$, $U_f^{\bullet}|_{\mathrm{Im}\psi^\bullet}:\mathrm{Im}\psi^\bullet\longrightarrow\mathfrak{Z}^k(S^{n+k+s})$ son idénticos (se supone que U, f y U',g dan la misma orientación sobre M^{n+k}, en caso contrario serían idénticos salvo el signo).

Demostración

Sean $[(M^k,F)]\in\mathfrak{Z}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})$, $\overline{Tf}:\nu(M^k)\longrightarrow\nu(f(M^k))$ y $\overline{Tg}:\nu(M)^k\longrightarrow\nu(g(M^k))$. $U_f^{\bullet}([(M^k,F)]) = [(f(M^k),(\overline{Tf}(F),U))]$ y ${U'_g}^{\bullet}([(M^k,F)]) = [(g(M^k),(\overline{Tg}(F),U'))]$.

Por el Lema III.3.4, al ser $s\geq n+k+2$ y $\partial R^{n+k+s}=\emptyset$, existe una isotopía de clase C^∞ $H:R^{n+k+s}\mathrm{x}I\longrightarrow R^{n+k+s}$, que podemos suponer verifica $H_t=\mathrm{Id}$ para cada $t\in[0,1/3)$ y $H_t=H_1$ si $t\in(2/3,1]$, tal que $H_1|_{f(M^{n+k})}=g\circ f^{-1}$.

Definamos $\tilde{H}:R^{n+k+s}\mathrm{x}I\longrightarrow R^{n+k+s}\mathrm{x}I$ por $\tilde{H}(x,t) = (H(x,t),t)$. Como U se puede considerar también como una referencia para $f(M^{n+k})\mathrm{x}I$, se tiene que $U''=\overline{T\tilde{H}}(U)$ es una referencia para $\tilde{H}(f(M^{n+k})\mathrm{x}I)$. Por tanto, $(\tilde{H}(f(M^k)\mathrm{x}I),(\overline{T\tilde{H}}(\overline{Tf}(F)),U''))$ realiza una homología entre $(f(M^k),(\overline{Tf}(F),U))$ y $(g(M^k),(\overline{Tg}(F),U''|_{g(M^{n+k})}))$ por lo cual obtenemmos que $U_f^{\bullet}([(M^k,F)]) = (U''|_{g(M^{n+k})})_g^{\bullet}([(M^k,F)])$.

Si $[(M^k,F)]\in\mathrm{Im}\psi^\bullet$, existe $[(N^k,G)]\in\mathfrak{Z}^k(S^{n+k})$ tal que

$\psi^{\bullet}([(N^k,G)]) = [(M^k,F)]$. Bastará con ver que $(U'^{\bullet}_{g}\circ\psi^{\bullet})([(N^k,G)]) = ((U''|_{g(M^{n+k})})^{\bullet}_{g}\circ\psi^{\bullet})([(N^k,G)])$. Pero se tiene que $(U'^{\bullet}_{g}\circ\psi^{\bullet})([(N^k,G)]) = U'^{\bullet}_{g}([(\psi(N^k),\overline{T\psi}(G)])$ y $((U''|_{g(M^{n+k})})^{\bullet}_{g}\circ\psi^{\bullet})([(N^k,G)]) = (U''|_{g(M^{n+k})})^{\bullet}_{g}([(\psi(N^k),\overline{T\psi}(G))])$.

Como $\psi(N^k)\subset W$ y W es contractible, se tiene que $\psi(N^k)$ se puede contraer a un punto en M^{n+k}, y basta aplicar ahora las técnicas usadas en la Prop. III.3.9 para concluir la demostración.∎

Lema III.3.11

Sean M^n una variedad C^{∞}, compacta, de dimensión n y $f:M^n \longrightarrow R^{n+s}$ una inmersión difeomórfica de clase C^{∞}, $a\in \mathrm{Int}(M^n)$ tal que $f(a)=0$. Entonces, existen $g:M^n \longrightarrow R^{n+s}$ inmersión difeomórfica C^{∞}, U subconjunto abierto de M^n, contenido en $\mathrm{Int}(M^n)$, con $a\in U$, y $\delta>0$ tales que $g(a)=0$ y $g(\overline{U})=\overline{B}^n_{\delta}(0)\times\{0\}$.

Demostración

Como localmente toda subvariedad sin borde de R^{n+s} es la gráfica de una aplicación de clase C^{∞}, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $M'^n=f(M^n)\subset R^{n+s}\equiv R^n\times R^s$, $0\in\mathrm{Int}(M'^n)$ y existen $\varepsilon>0$ y $h:B^n_{\varepsilon}(0) \longrightarrow R^s$ aplicación de clase C^{∞} tal que $h(0)=0$ y $U_{\varepsilon} = M'^n\cap p_1^{-1}(B^n_{\varepsilon}(0)) = \{(x,h(x)) : x\in B^n_{\varepsilon}(0)\}$. Consideremos $0<\delta<\varepsilon/2$, $U_{\delta} = M'^n\cap p_1^{-1}(B^n_{\delta}(0))$, $U_{\varepsilon/2} = M'^n\cap p_1^{-1}(B_{\varepsilon/2}(0))$ y $\lambda:M'^n \longrightarrow [0,1]$ aplicación C^{∞} tal que $\lambda|_{M'^n\setminus U_{\varepsilon/2}}=1$ y $\lambda|_{U_{\delta}}=0$.

Definimos $\tilde{g}:M'^n \longrightarrow R^n\times R^s$, aplicación de clase C^{∞}, por $\tilde{g}(\bar{x})=(x,\lambda(\bar{x})y)$, donde $\bar{x}=(x,y)\in R^n\times R^s$. Se verifica:

1-. $\tilde{g}$ es inyectiva. En efecto: existen las siguientes posibilidades:

a) $\tilde{g}(\bar{x}_0)=\tilde{g}(\bar{x}_1)$ con $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in M'^n \setminus U_{\varepsilon/2}$. En este caso como $\tilde{g}(\bar{x}_0)=\bar{x}_0$ y $\tilde{g}(\bar{x}_1)=\bar{x}_1$, se concluye que $\bar{x}_0=\bar{x}_1$.

b) $\tilde{g}(\bar{x}_0)=\tilde{g}(\bar{x}_1)$ con $\bar{x}_0 \in M'^n \setminus U_{\varepsilon/2}$ y $\bar{x}_1 \in U_{\varepsilon/2}$. Como $\tilde{g}(\bar{x}_0)=\bar{x}_0$ se tiene que $p_1(\tilde{g}(\bar{x}_0)) \notin B^n_{\varepsilon/2}(0)$ y $p_1(\tilde{g}(\bar{x}_1)) \in B^n_{\varepsilon/2}(0)$ y llegamos a una contradicción.

c) $\tilde{g}(\bar{x}_0)=\tilde{g}(\bar{x}_1)$ y $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in U_{\varepsilon/2}$. Entonces, $\tilde{g}(\bar{x}_0)=(x_0, \lambda(\bar{x}_0)h(x_0))$ y $\tilde{g}(\bar{x}_1)=(x_1, \lambda(\bar{x}_1)h(x_1))$ permite deducir que $x_0=x_1$ y por tanto $h(x_0)=h(x_1)$, es decir, $\bar{x}_0=\bar{x}_1$.

En consecuencia $\tilde{g}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

2-. $\tilde{g}$ es una inmersión. Basta ver que para cada $\bar{x} \in M'^n$, $\tilde{g}$ es inmersión en $\bar{x}$.

Si $\bar{x} \in M'^n \setminus \bar{U}_{\varepsilon/2}$ de $\tilde{g}|_{M'^n \setminus \bar{U}_{\varepsilon/2}} = Id|_{M'^n \setminus U_{\varepsilon/2}}$ se deduce que $\tilde{g}$ es inmersión en $\bar{x}$. Por tanto es suficiente tomar $\bar{x} \in U_{\varepsilon/2}$. Se tiene que $c=(U_\varepsilon, \Psi, \mathbb{R}^n)$ donde $\Psi: U_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^{n+s}$ es definida por $\Psi(\bar{x})=\Psi(x,y)=x$ es una carta de M'^n. Entonces, la aplicación $\tilde{g}\circ\Psi^{-1}: B^n_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+s}$ es $(\tilde{g}\circ\Psi^{-1})(x)=\tilde{g}(x,h(x))=(x,\lambda(x,h(x))h(x))$ y como consecuencia $D(\tilde{g}\circ\Psi^{-1})(x)$ es inyectiva. Como $\partial\mathbb{R}^{n+s}=\emptyset$, $\tilde{g}$ es una inmersión en $\bar{x}$.

Finalmente definimos $g: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+s}$ por $g(x)=(\tilde{g}\circ f)(x)$. Se verifica que g es una inmersión difeomórfica de clase C^∞, $g(a)=\tilde{g}(0)=0$ y $g(f^{-1}(U_\delta)) = \tilde{g}(U_\delta) = B^n_\delta(0)\times\{0\}$.■

Corolario III.3.12

Sean M^{n+k} una π-variedad compacta, $n\geq k+2$, $f:M^{n+k}\longrightarrow R^{n+k+s}$ una inmersión difeomórfica tal que $\nu(f(M^{n+k}))$ es trivializable y $U=\{u_1,\ldots,u_s\}$ una familia de secciones de clase C^{∞}, linealmente independientes, de $\nu(f(M^{n+k}))$. Sea $c=(U,\psi^{-1},R^{n+k})$ una carta de la orientación de M^{n+k} de manera que $\psi:\bar{B}^{n+k}(0)\longrightarrow\bar{U}\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$. Entonces, la siguiente composición de homomorfismos

$$\Pi_{n+k}(S^n)\xrightarrow{\Pi^k_n}\mathfrak{J}^k(S^{n+k})\xrightarrow{\psi^*}\mathfrak{J}^k(M^{n+k},\partial M^{n+k})\xrightarrow{U^*_f}$$
$$\xrightarrow{U^*_f}\mathfrak{J}^k(S^{n+k+s})\xrightarrow{(\Pi^k_{n+s})^{-1}}\Pi_{n+k+s}(S^{n+s})\quad \text{es } \Sigma^s.$$

Demostración

Sea $r>s$ tal que $r\geq n+k+2$ y

$E^{r-s}:\mathfrak{J}^k(S^{n+k+s})\equiv\mathfrak{J}^k_c(R^{n+k+s})\longrightarrow\mathfrak{J}^k(S^{n+k+r})\equiv\mathfrak{J}^k_c(R^{n+k+r})$ el homomorfismo suspensión definido en 0.6.11. Es claro que $E^{r-s}\circ U^*_f=U'^*_f$, donde $U'=\{U,e_{n+k+s+1},\ldots,e_{n+k+r}\}$ (se identifica f con $i\circ f$ donde $i:R^{n+k+s}\hookrightarrow R^{n+k+r}$ es la inclusión canónica).

$U'^*_f|_{\mathrm{Im}\psi^*}$ no depende ni de U' ni de f. Podemos suponer por tanto que f es una inmersión como en el Lema III.3.11. Así, existe $U\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$ tal que $f(\bar{U})=\bar{B}^{n+k}(0)\times\{0\}$. Por otro lado ψ^* no depende de la carta que se tome, por lo que podemos suponer que $\psi:B^{n+k}(0)\longrightarrow U\subset\mathrm{Int}(M^{n+k})$ es $f^{-1}|_U$. Si $[(M^k,F)]\in\mathfrak{J}^k(S^{n+k})$,

$$(U'^*_f\circ\psi^*)([(M^k,F)])=U'^*_f([(\psi(M^k),\overline{T\psi}(F))])=$$
$$=[(M^k,(F,e_{n+k+s+1},\ldots,e_{n+k+r}))].$$

Como $M^k\subset B^{n+k}(0)$ y U' está definido en todos los puntos de $B^{n+k}(0)$, lo mismo que $\{e_{n+k+1},\ldots,e_{n+k+r}\}$ se tiene, razonando como en III.3.10, que

$[(M^k,(F,U,e_{n+k+s+1},\ldots,e_{n+k+r}))] = [(M^k,(F,e_{n+k+1},\ldots,e_{n+k+r}))]=$
$= E^r([(M^k,F)])$. Hemos demostrado pues, que $U'^{\bullet}_f \circ \psi^{\bullet} = E^r$ y como $U'^{\bullet}_f = E^{r-s} \circ U^{\bullet}_f$ se deduce que $U^{\bullet}_f \circ \psi^{\bullet} = E^s$ (observemos que al ser $n \geq k+2$, E es un isomorfismo).■

Corolario III.3.13

Sea M^{n+k} en la condiciones del Corolario III.3.12. Se tiene:

a) $U^{\bullet}_f$ es un epimorfismo y $\psi^{\bullet}$ es un monomorfismo.

b) Si M^{n+k} es k-conexa y $\partial M^{n+k}=\emptyset$, de a) y III.3.5 obtenemos que $\psi^{\bullet}$ es un isomorfismo y $U^{\bullet}_f = E^s \circ \psi^{\bullet -1}$, de donde se deduce que $U^{\bullet}_f$ es un isomorfismo que no depende ni de U ni de f.■

Los resultados anteriores permiten establecer el siguiente teorema.

Teorema III.3.14

Sean M^{n+k} una π-variedad compacta, orientada, $n \geq k+2$, k-conexa, sin borde y M^n una variedad, orientada, sin borde, conexa. Sea $g: M^{n+k} \longrightarrow M^n$ una aplicación continua. El grado generalizado de g, $d(g) \in \mathfrak{J}^k(M^{n+k})$ definido en III.2.5 se puede interpretar como un elemento de Π_k (ver sección II.1) de la siguiente forma:

Sean $f: M^{n+k} \longrightarrow R^{n+k+s}$ una inmersión difeomórfica C^{∞} tal que $\nu(f(M^{n+k}))$ sea trivializable y $U=\{u_1,\ldots,u_s\}$ familia de secciones de clase C^{∞}, linealmente independientes de $\nu(f(M^{n+k}))$, de forma que f y U induzcan la orientación de M^{n+k}. Identificamos $d(g)$ con $(\alpha_{n+s} \circ (\Pi^k_{n+s})^{-1} \circ U^{\bullet}_f)(d(g))$, donde $\alpha_{n+s}: \Pi_{n+k+s}(S^{n+s}) \longrightarrow \Pi_k$ es el isomorfismo definido en la sección II.1. El isomorfismo

$\alpha_{n+s}\circ(\Pi^k_{n+s})^{-1}\circ U^{\bullet}_f$ no depende ni de s, ni de f, ni de U. En el caso particular en el que $M^n = S^n$, $d(g)$ caracteriza la clase de homotopía de g puesto que α_{n+s}, Π^k_{n+s} y $U^{\bullet}_f$ son isomorfismos y $d(g) = \Pi^k_n([g])$ (III.2.6).■

Proposición III.3.15

Sean M^{n+k} y M'^{n+k} dos variedades compactas, k-conexas, sin borde, orientadas en R^{n+k+s}, $n\geq k+2$, F y F' referencias normales para M^{n+k} y M'^{n+k} respectivamente. Si (M^{n+k},F) y (M'^{n+k},F') son homólogas mediante (M^{n+k+1},G) y $g:M^{n+k+1}\longrightarrow M^n$ es una aplicación continua, se tiene que $d(g|_{M^{n+k}}) = d(g|_{M'^{n+k}})$.

Demostración

Basta demostrarlo para el caso en que $g:M^{n+k+1}\longrightarrow M^n$ es de clase C^{∞} y $r\in M^n$ es valor regular de g, $g|_{M^{n+k}}$ y $g|_{M'^{n+k}}$. Se verifica que

$$d(g|_{M^{n+k}}) = (\alpha_{n+s}\circ(\Pi^k_{n+s})^{-1}\circ F^{\bullet}_i)([[(g|_{M^{n+k}})^{-1}(r),F_{g|_{M^{n+k}}}]])$$

$$d(g|_{M'^{n+k}}) = (\alpha_{n+s}\circ(\Pi^k_{n+s})^{-1}\circ F'^{\bullet}_i)([[(g|_{M'^{n+k}})^{-1}(r),F_{g|_{M'^{n+k}}}]]).$$

Como $(g^{-1}(r),(F_g,G))$ realiza una homología entre $((g|_{M^{n+k}})^{-1}(r),(F_{g|_{M^{n+k}}},F))$ y $((g|_{M'^{n+k}})^{-1}(r),(F_{g|_{M'^{n+k}}},F'))$ se tiene que

$$F^{\bullet}_i([[(g|_{M^{n+k}})^{-1}(r),F_{g|_{M^{n+k}}}]]) = F'^{\bullet}_i([[(g|_{M'^{n+k}})^{-1}(r),F_{g|_{M'^{n+k}}}]])$$

y por lo tanto $d(g|_{M^{n+k}}) = d(g|_{M'^{n+k}})$.■

III.4 INVARIANTE DE HOPF GENERALIZADO

En la sección 0.6 se establecieron la definición y propiedades mas importantes del homomorfismo de Hopf, $\gamma:\Pi_{2k+1}(S^{k+1})\longrightarrow\mathbb{Z}$, y se observaba que para cada aplicación de clase C^∞ $f:S^{2k+1}\longrightarrow S^{k+1}$, $\gamma(f)$ dependía únicamente de la posición de $f^{-1}(a_0)$ y $f^{-1}(a_1)$ en $\mathbb{R}^{2k+1}$ donde a_0 y a_1 son dos valores regulares cualesquiera de f. Varias generalizaciones de este invariante han sido definidas, en particular las debidas a George W. Whitehead [35] y a Michel A. Kervaire [21]. La segunda se puede considerar como una extensión, a su vez, de la de Whitehead, por lo que cuando nos refiramos al invariante de Hopf generalizado lo haremos al definido por Kervaire, que se establece como sigue:

Sean $f:S^{n+d+1}\longrightarrow S^{n+1}$ una aplicación de clase C^∞, donde $d\geq n$, y a_0,a_1 dos valores regulares de f, $M^d=f^{-1}(a_0)$ y $M'^d=f^{-1}(a_1)$ de manera que $M^d\cup M'^d\subset S^{n+d+1}\setminus\{q\}$. Sean F_0 y F_1 las referencias normales asociadas a M^d y M'^d mediante f. Podemos suponer que M^d y M'^d están contenidas en $\mathbb{R}^{n+d+1}$ (III.3.1) y por tanto la aplicación $\varphi:M^d\times M'^d\longrightarrow S^{n+d}$ definida por $\varphi(x,y) = \dfrac{y-x}{\|y-x\|}$ está bien definida y es de clase C^∞. $\{F_0\times\{0\},\{0\}\times F_1\}$ se puede considerar como una referencia normal para $M^d\times M'^d$, como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+d+1}\times\mathbb{R}^{n+d+1}$. En estas condiciones, se define $h(f) = ((\Pi^{d-n}_{3n+d+2})^{-1}\circ(F_0\times\{0\},\{0\}\times F_1)^*_{i\times i}\circ\Pi^{d-n}_{2n+d})([\varphi])$, donde $i:M^d\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+d+1}$ es la inclusión, y por tanto $h(f)\in\Pi_{2d+2n+2}(S^{3n+d+2})$. Se demuestra que h es un homomorfismo bien definido entre $\Pi_{d+n+1}(S^{n+1})$ y $\Pi_{2d+2n+2}(S^{3n+d+2})$.

Consideremos $[f]\in\Pi_{d+n+1}(S^{n+1})$ y $\Pi^{d}_{n+1}([f]) = [(N^d,F)]$ $[(N^d,F)] \in \mathfrak{F}^d(S^{n+d+1}) \cong \mathfrak{F}^d_c(R^{n+d+1})$. En virtud de lo establecido por Pontryagin en [29] (pags. 56 y 77) podemos suponer que N^d es conexa y F es un sistema ortonormal.

Vamos a centrarnos en el caso en que N^d sea $(d-n)$-conexa y $2n-2\geq d\geq n\geq 1$. En estas condiciones, $h(f)$ se puede interpretar como el grado de φ, $d(\varphi)$. Supongamos que $F=\{v_1,\dots,v_{n+1}\}$ y para $\bar{c}=(c_1,\dots,c_{n+1})\in R^{n+1}$, con $\|\bar{c}\|$ suficientemente pequeño definimos $\bar{C}:N^d\longrightarrow R^{n+d+1}$ aplicación C^∞ por $\bar{C}(x) = x+c_1v_1(x)+\cdots+c_{n+1}v_{n+1}(x)$ (ver 0.6.20). Se deduce de [29] (pag. 69) y de la Proposición III.3.15, que $h(f)=d(L)$, donde $L:N^d\times N^d\longrightarrow S^{n+d}$ es la aplicación C^∞ definida por $L(y,x) = \dfrac{x-\bar{C}(y)}{\|x-\bar{C}(y)\|}$ para cualquier $\bar{c}\in R^{n+1}$, con $\|\bar{c}\|$ suficientemente pequeño.

A continuación vamos a establecer una proposición de la que como corolario inmediato se obtiene el Lema 6.1 de [21] (pag. 358). Antes necesitamos algunos resultados previos.

Lema III.4.1

Sean $[(M^k,F)]\in\mathfrak{F}^k(S^{n+k})$ donde $F=\{v_1,\dots,v_n\}$ y sea σ una permutación cualquiera del conjunto $\{1,\dots,n\}$. Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ sea $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$. Consideramos $F'=\{\varepsilon_1v_{\sigma(1)},\dots,\varepsilon_nv_{\sigma(n)}\}$. Se verifica que $[(M^k,F)] = \pm[(M^k,F')]$.

Demostración

Sea $G\in GL(\mathbb{R}^n)$ tal que $G(F)=F'$.

a) Si $|G|>0$, existe $\rho: I\longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, camino de clase C^∞, tal que $\rho(0)=G$ y $\rho(1)=\mathrm{Id}$. Definimos una referencia normal para $M^k\times I$, $\rho(F)$, por $\rho(F)(x,t) = \rho(t)(F(x))$. Es claro que $(M^k\times I,\rho(F))$ realiza una homología entre (M^k,F) y (M^k,F'). Por tanto, en este caso $[(M^k,F)] = [(M^k,F')]$.

b) Si $|G|<0$, existe $\rho: I\longrightarrow GL_-(\mathbb{R}^n)$ camino de clase C^∞, con $\rho(0)=G$ y $\rho(1)=\begin{pmatrix} -1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{pmatrix}$. Entonces, $(M^k\times I,\rho(F))$ realiza una homología entre (M^k,F') y $(M^k,\rho(1)F)$. Como $\rho(1)(F) = \{-v_1,v_2,\dots,v_n\}$ solo resta ver que $[(M^k,\{-v_1,v_2,\dots,v_n\})] = -[(M^k,F)]$. Sea $f:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ aplicación de clase C^∞ con $p\in(\mathrm{v.r.})(f)$ y tal que $\Pi^k_n([f]) = [(M^k,F)]$, y sea $\alpha:S^n\longrightarrow S^n$ definida por $\alpha(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) = (-x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$, se tiene que $[((\alpha\circ f)^{-1}(p),F_{\alpha\circ f})] = [(M^k,\{-v_1,v_2,\dots,v_n\})]$. Como $[f] = -[\alpha\circ f]$ concluimos que $[(M^k,\{-v_1,v_2,\dots,v_n\})] = \Pi^k_n([\alpha\circ f)] = -\Pi^k_n([f]) = -[(M^k,F)]$.∎

Definición III.4.2 ([33], pag. 404)

Sean X, Y espacios topológicos y $f:X\longrightarrow Y$ una aplicación continua. Se dice que f es una n-equivalencia, si induce una aplicación biyectiva entre las componentes conexas de X y de Y y para cada $x\in X$, $f_*:\Pi_q(X,x)\longrightarrow\Pi_q(Y,f(x))$ es un isomorfismo para $0<q<n$ y epimorfismo para $q=n$.

Lema III.4.3 ([33], pag. 405)

Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una n-equivalencia. Si P es un CW-complejo de dimensión menor o igual que n, se verifica que la aplicación $f_*\colon [P,X] \longrightarrow [P,Y]$ es sobreyectiva y si $\dim P \le n-1$, f_* es inyectiva.

Lema III.4.4 ([13], pag. 438-439)

Sea $i\colon SO(n+d) \longrightarrow SO(n+d+1)$ definida por

$$i(A) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Se verifica que i es una (n+d-1)-equivalencia.

Proposición III.4.5

Sea $[f] \in \Pi_{n+d+1}(S^{n+1})$ con $2n-2 \ge d \ge n \ge 1$, y $\Pi^d_{n+1}([f]) = [(M^d,F)]$ donde M^d es conexa y F es una familia ortonormal de secciones de $\nu(M^d)$, $F=\{v_1,\ldots,v_{n+1}\}$. Supongamos que M^d está contenida en $\mathbb{R}^{n+d}$ ($q \notin M^d$, $\mathbb{R}^{n+d} \subset \mathbb{R}^{n+d+1}$) y que es (d-n)-conexa. Consideremos también el vector $\bar{t} = e_{n+d+1} \in \mathbb{R}^{n+d+1}$ y escribamos $e_{n+d+1} = \alpha_1(x)v_1(x)+\cdots+\alpha_{n+1}(x)v_{n+1}(x)$ para cada $x \in M^d$. Se define $\psi\colon M^d \longrightarrow S^n$ por $\psi(x) = (\alpha_1(x),\ldots,\alpha_{n+1}(x))$. Se verifica que $h(f) = d(\psi)$ (salvo signo).

Demostración

Sea $L\colon M^d \times M^d \longrightarrow S^{n+d}$ definida por $L(y,x) = \dfrac{x-y-\delta v_{n+1}(y)}{\|x-y-\delta v_{n+1}(y)\|}$ con $\delta>0$ suficientemente pequeño.

Es suficiente demostrar que

$$((F\times\{0\},\{0\}\times F)^{*}_{1\times 1}\circ\Pi^{d-n}_{n+d})([L]) = (E^{n+d+1}\circ F^{*}_{1}\circ\Pi^{d-n}_{n})([\psi]) =$$

$= ((F,e_{n+d+2},\dots\dots,e_{2n+2d+2})^{*}_{1}\circ\Pi^{d-n}_{n})([\psi]) \in \Pi_{2n+2d+2}(S^{3n+d+2})$ salvo signo.

Podemos suponer que $e_{n+1}\in S^{n}$ es un valor regular de ψ (si no fuera así con una transformación ortogonal aplicada a F lo conseguiríamos).

Sea $V^{d-n} = \psi^{-1}(e_{n+1})$, subvariedad de M^{d}, contenida en el subconjunto abierto de M^{d}, $\psi^{-1}(\mathring{E}^{n}_{*})$. Como en [29] (pag. 71) se tiene que $L^{-1}(e_{n+d+1}) = \Delta(V^{d-n})$, donde $\Delta: M^{d}\longrightarrow M^{d}\times M^{d}$ es la aplicación diagonal definida por $\Delta(x)=(x,x)$.

Si $x\in\psi^{-1}(\mathring{E}^{n}_{+})$, $\alpha_{n+1}(x)>0$ y por tanto,

$$v_{n+1}(x) = \frac{\bar{t}}{\alpha_{n+1}(x)} - \frac{\alpha_{1}(x)}{\alpha_{n+1}(x)}\,v_{1}(x) - \cdots\cdots\cdots - \frac{\alpha_{n}(x)}{\alpha_{n+1}(x)}\,v_{n}(x).$$

Como consecuencia se tiene que $\{v_{1}(x),\dots\dots,v_{n}(x),\bar{t}\}$ es base del espacio normal en x a M^{d} en R^{n+d+1} para cada $x\in\psi^{-1}(\mathring{E}^{n}_{+})$. Sean $p: R^{n+d+1}\longrightarrow R^{n+d}$ la proyección ortogonal y para cada $j\in\{1,2,\dots\dots,n\}$ $w_{j}=p(v_{j})$, así $\{w_{1}(x),\dots\dots,w_{n}(x)\}$ constituye una base del espacio normal en x a M^{d} en R^{n+d} para cada $x\in\psi^{-1}(\mathring{E}^{n}_{+})$.

Del hecho de que M^{d} sea (d-n)-conexa se deduce la existencia de $c=(U,\varphi,R^{d})$, carta de M^{d}, donde U es un subconjunto abierto, contractible de M^{d}, tal que $V^{d-n}\subset U$. Sea $V = U\cap\psi^{-1}(\mathring{E}^{n}_{+})$, V es un subconjunto abierto de M^{d} que contiene a V^{d-n}.

Sea $E=B^{n}(0)\times V\longrightarrow R^{n+d}$ la aplicación de clase C^{∞} definida por $E((\lambda_{1},\dots\dots,\lambda_{n}),x) = x+\delta(\lambda_{1}w_{1}(x)+\cdots\cdots+\lambda_{n}w_{n}(x))$. Es claro que si δ es suficientemente pequeño, se tiene que E es un difeomorfismo sobre su imagen.

Si $x\in V^{d-n}$, se tiene que $\alpha_i(x)=0$ para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$ y $\alpha_{n+1}(x)=1$ y por tanto si escribimos ψ y L en coordenadas, y las seguimos denotando igual, $\psi: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vendrá dada por $\psi(x) = (\alpha_1(x),\ldots,\alpha_n(x))$ y $L: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ por

$$L(y,x) = x-y-\delta\left(-\frac{\alpha_1(y)}{\alpha_{n+1}(y)}w_1(y) - \cdots\cdots - \frac{\alpha_n(y)}{\alpha_{n+1}(y)}w_n(y)\right), \quad \text{y}$$

por tanto L se puede factorizar como sigue:

$$L: V\times V \xrightarrow{N} (B_1^n(0)\times V)\times(B_1^n(0)\times V) \xrightarrow{E\times E} \mathbb{R}^{n+d}\times\mathbb{R}^{n+d} \xrightarrow{M} \mathbb{R}^{n+d}, \quad \text{donde}$$

$$N(y,x) = \left(\left(-\frac{\alpha_1(y)}{\alpha_{n+1}(y)},\cdots\cdots, -\frac{\alpha_n(y)}{\alpha_{n+1}(y)}, y\right), \left(0,0,\ldots,0,x\right)\right) \quad \text{y}$$

$M(a,b) = a-b$.

Se tiene que

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\alpha_j(y)}{\alpha_{n+1}(y)}\right)}{\partial y_\alpha} = \frac{\dfrac{\partial\alpha_j}{\partial y_\alpha}(y)\alpha_{n+1}(y) - \alpha_j(y)\dfrac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial y_\alpha}(y)}{\alpha_{n+1}(y)^2} =$$

$= \dfrac{\partial\alpha_j}{\partial y_\alpha}(y)$ para cada $y\in V^{d-n}$. Como consecuencia, para cada $x\in V^{d-n}$,

$$D\psi(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

y para cada $(x,x)\in\Delta(V^{d-n})$

$$DL(x,x) = DE(0,x)\left(\begin{array}{ccc:ccc} & D\psi(x) & & & 0 & \\ \hdashline -1 & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & -1 & & & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\,n \\ \\ \}\,d \end{array}, \quad \text{salvo}$$

(each diagonal block is of size d)

signo en cada columna (no existe problema en cambiar todas las columnas de signo, en virtud del Lema III.4.1).

Para cada $x \in V^{d-n}$ vamos a denotar por A_x a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} & D\psi(x) & & & 0 & \\ \hdashline -1 & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & -1 & & & 1 \end{array}\right).$$

Sean $\{z_1,\ldots,z_n\}$ las secciones de clase C^∞ del fibrado normal en R^d a V^{d-n}, tales que $D\psi(x)(z_j(x)) = e_j$ para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces, $\{\theta_C^x(z_1(x)),\ldots,\theta_C^x(z_n(x))\}$ es la referencia asociada a ψ, F_ψ, en $x \in V^{d-n}$.

Para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$ y todo $x \in V^{d-n}$ definimos $S_j(x,x) = (z_j(x), z_j(x)) \in R^{2d}$ y para cada $i \in \{1,\ldots,d\}$ $S_{n+i}(x,x) = (-e_i, e_i) \in R^{2d}$. Es claro que $A_x(S_j(x,x)) = e_j$ si

$x \in V^{d-n}$ y $j \in \{1,\ldots\ldots,n\}$ y $A_x(S_{n+1}(x,x)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\dfrac{\partial\alpha_n}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2\,(n+1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\theta^{(x,x)}_{cxc}(\{\, S_1(x,x),\ldots\ldots,S_n(x,x),S_{n+1}(x,x),\ldots\ldots,S_{n+d}(x,x)\,\})$ es base del espacio normal en (x,x) a $\Delta(V^{d-n})$ en $M^d x M^d$, verificándose

$$A_x(S_1(x,x),\ldots\ldots,S_{n+d}(x,x)) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & -\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & -\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_d} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & -\dfrac{\partial\alpha_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & -\dfrac{\partial\alpha_n}{\partial x_d} \\ \hdashline & & & 2 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{array}\right) = B_x =$$

$= B_x(e_1,\ldots\ldots,e_{n+d})$.

Como consecuencia,

$DL(x,x)\left[(S_1(x,x),\ldots\ldots,S_{n+d}(x,x))B_x^{-1}DE(0,x)^{-1}\right] = (e_1,\ldots\ldots,e_{n+d})$ y por tanto $\theta^{(x,x)}_{cxc}\left[(S_1(x,x),\ldots\ldots,S_{n+d}(x,x))B_x^{-1}DE(0,x)^{-1}\right]$ es la referencia normal asociada a $\Delta(V^{d-n})$ en (x,x). Como veremos, al final de la demostración, la aplicación $\varepsilon: V^{d-n} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^{n+d})$ definida por $\varepsilon(x) = B_x^{-1}DE(0,x)^{-1}$ es homótopa a la aplicación constante Id o a la aplicación constante $I'=\left(\begin{array}{c:c} -1 & 0 \\ \hdashline 0 & \mathrm{Id} \end{array}\right)$, en

consecuencia $[(\Delta(V^{d-n}),(\theta^{\cdot}_{CxC}(S_1),\dots,\theta^{\cdot}_{CxC}(S_{n+d}),Fx\{0\},\{0\}xF))] =$

$\pm[(\Delta(V^{d-n}),((\theta^{\cdot}_{CxC}(S_1),\dots,\theta^{\cdot}_{CxC}(S_{n+d}))B^{-1}_{\cdot}DE(0,\cdot)^{-1},Fx\{0\},\{0\}xF))]$

por tanto $(Fx\{0\},\{0\}xF)^{\bullet}_{ixi}(\Pi^{d-n}_{n+d}([L])) =$

$$= [(\Delta(V^{d-n}),(\theta^{\cdot}_{CxC}(S_1),\dots,\theta^{\cdot}_{CxC}(S_{n+d}),Fx\{0\},\{0\}xF))] .$$

Por otra parte, como $(E^{n+d+1}\circ F^{\bullet}_{i}\circ\Pi^{d-n}_{n})([\psi])$ no depende ni de la inmersión, ni de F, podemos tomar para su cálculo la inmersión $\Delta:M^d \longrightarrow M^d x M^d \xrightarrow{ixi} R^{n+d+1} x R^{n+d+1}$. Sea H la familia de secciones de $\nu(\Delta(M^d))$, obtenida al llevar $(F,e_{n+d+1},\dots,e_{2n+2d+2})$ sobre $\Delta(M^d)$ mediante una isotopía. Se tiene que

$$(E^{n+d+1}\circ F^{\bullet}_{i}\circ\Pi^{d-n}_{n})([\psi]) = (H^{\bullet}_{\Delta}\circ\Pi^{d-n}_{n})([\psi]) =$$

$$= [(\Delta(V^{d-n}),(\Delta(\theta^{\cdot}_{C}(z_1)),\dots,\Delta(\theta^{\cdot}_{C}(z_n)),H))] .$$

Ahora se observa que $\Delta(\theta^{x}_{C}(z_j(x))) = \theta^{(x,x)}_{CxC}(S_j(x,x))$ $j\in\{1,\dots,n\}$ y $x\in V^{d-n}$ y como $(\theta^{(x,x)}(S_{n+1}(x,x),\dots,S_{n+d}(x,x)),Fx\{0\},\{0\}xF)$ y $H|_{\Delta(U)}$ están definidos para todo $x\in U$, que es contractible, razonando como en el Prop. III.3.9 se concluye que $((Fx\{0\},\{0\}xF)^{\bullet}_{ixi}\circ\Pi^{d-n}_{n+d})([L]) = (H^{\bullet}_{\Delta}\circ\Pi^{d-n}_{n})([\psi])$ salvo signo y por tanto $h(f) = d(\psi)$.

Para terminar la demostración resta probar que $\varepsilon:V^{d-n}\longrightarrow GL(R^{n+d})$ es homótopa a una constante. Como la aplicación que asocia $x\longmapsto B_x$ lo es, es suficiente comprobar que

$\varepsilon' : V^{d-n} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^{n+d})$ definida por $\varepsilon'(x) = DE(0,x)$ es homótopa a una constante. Sea $\mathcal{H}: B^n(0) \times M^d \times (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+d+1}$ definida por $\mathcal{H}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x, \lambda_{n+1}) = x + \delta(\lambda_1 v_1(x) + \cdots + \lambda_{n+1} v_{n+1}(x))$, con δ suficientemente pequeño. Se tiene que $\mathcal{H}$ es un difeomorfismo sobre su imagen y en consecuencia $\mathcal{H}|_{B^n(0)\times U\times(-1,1)} : B^n(0)\times U\times(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+d+1}$ también lo es. Podemos suponer que $|D\mathcal{H}(y)|>0$ para cada $y \in B^n(0)\times U\times(-1,1)$ (si no es así, cambiamos una columna de signo y se consigue).

Sea $x \in U$. Entonces,

$$
D\mathcal{H}(0,x,0) = \begin{pmatrix}
\delta v_1^1(x) & \cdots & \delta v_n^1(x) & \cdots\cdots & \delta v_{n+1}^1(x) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & Q_x & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\delta v_1^{n+d+1}(x) & \cdots & \delta v_n^{n+d+1}(x) & 0 \cdots 0 & \delta v_{n+1}^{n+d+1}(x)
\end{pmatrix}
$$

donde $v_i^j(x)$ denota la j-ésima coordenada del vector $v_i(x)$.

Al ser U contractible, la composición de aplicaciones $V^{d-n} \xrightarrow{i} U \xrightarrow{D\mathcal{H}(0,\cdot,0)} GL(\mathbb{R}^{n+d+1})$ es homótopa a la aplicación constante id, pero si $x \in V^{d-n}$ se tiene que

$$
\mathrm{D}\mathcal{H}(0,x,0) = \left(\begin{array}{ccc:ccc:c}
\delta w_1^1(x) & \cdots\cdots & \delta w_n^1(x) & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 0_x & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\delta w_1^{n+d}(x) & \cdots\cdots & \delta w_n^{n+d}(x) & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta
\end{array}\right)
$$

puesto que $v_j^{n+d+1}(x) = (v_j(x),\bar{t}) = (v_j(x),v_{n+1}(x)) = 0$. Quiere decirse que $\mathrm{D}\mathcal{H}(0,x,0) = \left(\begin{array}{c:c} \mathrm{D}E(0,x) & 0 \\ \hdashline 0 & \delta \end{array}\right)$, por una simple homotopía puedo suponer que $\delta=1$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & GL(\mathbb{R}^{n+d+1}) \arrow[r, "r"] & SO(n+d+1) \\
V^{d-n} \arrow[ur, "\mathrm{D}\mathcal{H}(0,\cdot,0)"] \arrow[dr, "\mathrm{D}E(0,\cdot)"'] & & \\
 & GL_+(\mathbb{R}^{n+d}) \arrow[r, "r"] & SO(n+d) \arrow[uu, "i"']
\end{tikzcd}
$$

, donde r es la equivalencia de homotopía obtenida por el método de ortonormalización de Gram-Schmit e $i:SO(n+d)\longrightarrow SO(n+d+1)$ ha sido definida en el Lema III.4.4.

La aplicación $\eta: V^{d-n}\longrightarrow SO(n+d+1)$ definida por $\eta(x) = r(\mathrm{D}\mathcal{H}(0,x,0))$ es homótopa a la constante Id. Es suficiente ver que $\eta': V^{d-n}\longrightarrow SO(n+d)$ también lo es.

$$x \longmapsto r(\mathrm{D}E(0,x))$$

El Lema III.4.4 asegura que i es $(n+d-1)$-equivalencia y por el Lema III.4.3 $i_*: [V^{d-n}, SO(n+d)] \longrightarrow [V^{d-n}, SO(n+d+1)]$ es inyectiva si $d-n \le (n+d+1)-1$. Como $d-n \le n+d-2$ si y solo si $2n-2 \ge 0$ y esto se verifica por hipótesis, obtenemos que i^* es inyectiva. Al ser $i_*([\eta]) = [i \circ \eta] = [\eta] = 0$ se tiene que $[\eta]=0$ y se concluye la demostración. ∎

Es bien conocido que si $[f] \in \mathrm{Im}\Sigma$, donde $\Sigma: \Pi_{n+d}(S^n) \longrightarrow \Pi_{n+d+1}(S^{n+1})$ es el homomorfismo suspensión, se verifica que $h(f)=0$ ([35] pag 192). Sin embargo, que a partir de que $h(f)$ sea nulo se tenga que $[f] \in \mathrm{Im}\Sigma$, se plantea como problema abierto en el mismo artículo. El siguiente corolario de la proposición anterior resuelve parcialmente el problema.

Corolario III.4.6

Sean $[f] \in \Pi_{n+d+1}(S^{n+1})$, $2n-2 \ge d \ge n \ge 1$ y $\Pi^d_{n+1}([f]) = [(M^d, F)]$, donde M^d es (d-n)-conexa, contenida en R^{n+d} y $F=\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ es una familia ortonormal de secciones de $\nu(M^d)$. En estas condiciones, si $h(f)=0$ se tiene que $[f] \in \mathrm{Im}\Sigma$.

Demostración

Según III.4.5 $d(\psi) = h(f) = 0$, donde $\psi: M^d \longrightarrow S^n$ estaba definida por $\psi(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_{n+1}(x))$, siendo $e_{n+d+1} = \alpha_1(x)v_1(x) + \cdots + \alpha_{n+1}(x)v_{n+1}(x)$.

Por las propiedades de grado, se tiene que $d(\psi) = 0$ si y solamente si ψ es homótopa a una aplicación constante. Ahora la Prop. 0.6.13 implica que $[f] \in \mathrm{Im}\Sigma$. ∎

CAPITULO IV

G-COMPLEMENTACION Y BIFURCACION. NUMERO DE ENLACE DE ESFERAS

En este capítulo vamos a tratar diversas aplicaciones de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

Se generalizará la noción de complementación, introducida en [11] y [12], y se darán resultados en la linea de los recogidos en [12]. Daremos aplicaciónes a la teoría de la bifurcación y se conseguirá como corolario la Prop. 4.2 de [15].

Este capítulo finaliza con una aplicación del grado generalizado al estudio del número de enlace de esferas de dimensiones superiores a uno.

IV.1 G-Complementación

En el año 1986 se publica un artículo con el título de *"On the covering dimension of the set of solutions of some nonlinear equations"* por P.M.Fitzpatrick, I.Massabo y J. Pejsachowicz, [12], en el que se da el concepto de complementación de aplicaciones continuas. Del hecho de que una aplicación continua f se pueda complementar se obtienen resultados acerca de la estructura y dimensión por recubrimientos (ver [9]) del conjunto de soluciones de la ecuación $f(x)=0$.

Con el fin de hacer este capítulo lo mas autocontenido posible, pasamos a dar la definición de complementación de aplicaciones así como enunciar los teoremas mas importantes que utilizaremos.

Por E vamos a denotar un espacio de Banach, por U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m \times E$, $m \geq 1$, y por $f:\bar{U} \longrightarrow E$ una aplicación continua de la forma $f(\lambda,x) = x-F(\lambda,x)$, donde $F:\bar{U} \longrightarrow E$ es una aplicación completamente continua, es decir, F es una aplicación continua tal que $\overline{F(D)}$ es un subconjunto compacto de E, para todo subconjunto acotado D de $\bar{U}$.

Definición IV.1.1

Diremos que f, en las condiciones anteriores, se puede complementar, si existe una aplicación continua y acotada $g:\bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (g es continua y transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados) tal que la aplicación $(g,f):\bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m \times E$ definida por $(g,f)(\lambda,x) = (g(\lambda,x),f(\lambda,x))$ no se anula en ∂U y el grado de Leray-Schauder de (g,f) en U es distinto de cero. En estas condiciones se dice que g es un complemento para f. Como hemos supuesto que U no es necesariamente acotado, la hipótesis de que el grado de Leray-Schauder de (g,f) sea distinto de cero significa que $(g,f)^{-1}(0)$ es un subconjunto compacto de U y que $d((g,f),V,0)\neq 0$, donde V es un subconjunto abierto y acotado de U que contiene a $(g,f)^{-1}(0)$. Obsérvese que $(g,f)|_V$ es una perturbación compacta de la idèntidad y por tanto $d((g,f),V,0)$ está definido.

Teorema IV.1.2 ([12], pag 783)

Sea U un subconjunto abierto y acotado de R^{n+m}. Supongamos que ∂U es una subvariedad de dimensión $(n+m-1)$ de R^{n+m}. Sea $f:\bar{U}\longrightarrow R^m$ una aplicación de clase C^p, tal que $0\in(v.r.)(f)\cap(v.r.)(f|_{\partial U})$. Si $f^{-1}(0)\cap\partial U\neq\emptyset$, se verifica que la aplicación f se puede complementar.

Teorema IV.1.3 ([12], pag 785)

Sean U un subconjunto abierto y acotado de $R^m\times E$, $f:\bar{U}\longrightarrow E$ y $g:\bar{U}\longrightarrow R^m$ un complemento para f, como en la definición IV.1.1. Se verifica que el homomorfismo inducido en la cohomología de Čech por $g:(f^{-1}(0),f^{-1}(0)\cap\partial U)\longrightarrow(R^m,R^m\setminus\{0\})$ es no trivial.

Teorema IV.1.4 ([12], pag. 778)

Sean $U\subset R^m\times E$, $f:\bar{U}\longrightarrow E$ y $g:\bar{U}\longrightarrow R^m$ complemento de f, como en la definición IV.1.1. Entonces, existe un subconjunto conexo $\mathfrak{C}$ de $f^{-1}(0)$, cuya dimensión en cada punto de $\mathfrak{C}\cap U$ es al menos m, que corta a $g^{-1}(0)$ y que verifica al menos una de la siguientes propiedades:

a) $\mathcal{C}$ no está acotado.

b) $\dim(\mathcal{C}\cap\partial U)\geq m-1$ y $g:\mathcal{C}\cap\partial U\longrightarrow\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ es esencial, en particular, cuando $m=1$, $\mathcal{C}\cap\partial U$ tiene al menos 2 puntos.

La definición del grado generalizado en espacios euclideos desarrollada en el capítulo I, así como la establecida para espacios normados en el capítulo II, permite generalizar de manera natural el concepto de complementación.

Definición IV.1.5

Sean E un espacio vectorial real normado, U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m\times E$ con $p_1(U)$ acotado en $\mathbb{R}^m$, $f:\bar{U}\longrightarrow E$ una aplicación de la forma $f(\lambda,x) = x-F(\lambda,x)$, donde $F:\bar{U}\longrightarrow E$ es una aplicación compacta. Diremos que f se puede ***complementar generalizadamente*** o simplemente ***G-complementar***, si existe una aplicación compacta $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ con $k\leq m$ tal que $(g,f):\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^k\times E$ no se anula en ∂U y el grado generalizado de la aplicación (g,f) en U, $d((g,f),U)$ es distinto de cero. (Observemos que tiene sentido $d((g,f),U)$ porque se verifican las hipótesis de la definición II.1.7).

Observación IV.1.6

Existen aplicaciones $f:\bar{U}\longrightarrow E$ que se pueden complementar pero no G-complementar mediante $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ con $k<m$. En efecto:

Sea $h:(\bar{B}^{n+1}(0),S^m)\longrightarrow(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})$ una aplicación continua y denotamos por h_0 a la aplicación $h_0:S^m\longrightarrow S^n$ definida por $h_0(x) = \dfrac{h(x)}{\|h(x)\|}$, por ([15], pag. 65) se tiene que

$d(h,B^{m+1}(0)) = \Sigma([h_0])$ ($\Sigma:\Pi_m(S^n)\longrightarrow\Pi_{m+1}(S^{n+1})$ es el homomorfismo suspensión). Por tanto, si consideramos $f:\bar{B}^3(0)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = x_3$ ($E=\mathbb{R}$, $F(x_1,x_2,x_3)=0$) es claro que $g:\bar{B}^3(0)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2)$ es un complemento para f y sin embargo no existe $h:\bar{B}^3(0)\longrightarrow\mathbb{R}$ aplicación continua tal que $(h,f)(\partial U)\subset\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ y $d((h,f),B^3(0))\neq 0$ puesto que $\Pi_2(S^1)=0$ y por tanto $d((h,f),U) \in \mathrm{Im}\Sigma=\{0\}$. ∎

El interés de la G-complementación es que existen abiertos U y aplicaciones $f:\bar{U}\longrightarrow E$ que no se pueden complementar y que sin embargo si se pueden G-complementar.

Ejemplo IV.1.7

Vamos a encontrar un abierto acotado U de $\mathbb{R}^5$, una aplicación continua $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ que puede ser G-complementada pero no complementada. Para ello es suficiente ver que se puede construir un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^5$ y $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ G-complementada tal que $f^{-1}(0)\cap\partial U = \bigcup_{j=1}^{r} S_j^4$ donde $S_i^4\cap S_j^4=\emptyset$ si $i\neq j$ y S_j^4 es homeomorfo a S^4 para cada $j\in\{1,2,\dots,r\}$. En efecto: si $f:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ en las condiciones anteriores se pudiera complementar, existiría $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ aplicación continua tal que $d((g,f),U)\neq 0$. En virtud del Teorema IV.1.3, $g:(f^{-1}(0),\bigcup_{j=1}^{r}S_j^4)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ induciría un homomorfismo $g^*:H^*(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\longrightarrow H^*(f^{-1}(0),\bigcup_{j=1}^{r}S_j^4)$ no trivial (H^* denota la cohomología de Čech). Consideremos $\bar{g}_2:\bigcup_{j=1}^{r}S_j^4\longrightarrow S^1$ definida por $\bar{g}_2(x) = \dfrac{g(x)}{\|g(x)\|}$ y $g_2:f^{-1}(0)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ una extensión continua cualquiera de $\bar{g}_2$.

La homotopía $H: (f^{-1}(0)\times I, \bigcup_{j=1}^{r} S_j^4\times I) \longrightarrow (R^2, R^2\setminus\{0\})$ definida por $H(x,t) = tg(x)+(1-t)g_2(x)$ nos permite deducir que $g_2^{\bullet}=g^{\bullet}$. Como $\Pi_4(S^1)=0$, existe $G: \bigcup_{j=1}^{r} S_j^4\times I \longrightarrow S^1$, homotopía continua, tal que $G_0=\bar{g}_2$ y G_1 es la aplicación de valor constante x_0, para algún $x_0\in S^1$. Sea $\bar{G}: (f^{-1}(0)\times\{0,1\}\cup(\bigcup_{j=1}^{r} S_j^4\times I)) \longrightarrow R^2$ definida por $\bar{G}(x,0)=g_2(x)$ si $x\in f^{-1}(0)$, $\bar{G}(x,1)=x_0$ si $x\in f^{-1}(0)$ y $\bar{G}(x,t)=G(x,t)$ si $(x,t)\in \bigcup_{j=1}^{r} S_j^4\times I$. Extendiendo $\bar{G}$ llegamos a una aplicación continua $G: (f^{-1}(0)\times I, \bigcup_{j=1}^{r} S_j^4\times I) \longrightarrow (R^2, R^2\setminus\{0\})$ tal que $G_0=g_2$ y G_1 es la aplicación de valor constante x_0. Por tanto, $g_2^{\bullet}=G_1^{\bullet}$ y como consecuencia $g^{\bullet}=G_1^{\bullet}$. Es claro que $G_1^{\bullet}$ es trivial y llegamos a una contradicción.

La construcción se hace de la siguiente manera:

Sea $\varphi: S^4 \longrightarrow S^3$ aplicación continua tal que $[\varphi]\in\Pi_4(S^3)$ no es cero. Si extendemos φ a una aplicación continua $\tilde{\varphi}: (\bar{B}^5(0), S^4) \longrightarrow (R^4, R^4\setminus\{0\})$ continua, se verifica que $d(\tilde{\varphi}, B^5(0)) = \Sigma([\varphi]) \neq 0$ ([15], pag.65) puesto que en virtud de 0.6.28 Σ es un isomorfismo. Por tanto, podemos elegir una aplicación continua $h: (\bar{B}^5(0), S^4) \longrightarrow (R^4, R^4\setminus\{0\})$ tal que $d(h, B^5(0))\neq 0$. Por el Lema 0.5.5, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $h(x) = (g_3(x), h_4(x)) \in R^3\times R$ donde g_3 es de clase C^{∞} y $0\in(\text{v.r.})(g_3|_{S^4})$. Es claro que g_3 es G-complementada por h_4, $g_3^{-1}(0)\cap S^4 = \bigcup_{j=1}^{r} M_j$, donde M_j es subvariedad de S^4 difeomorfa a S^1 para cada $j\in\{1,\dots,r\}$.

Ahora tomamos una familia de cartas $\{c_j : j\in\{1,\dots,r\}\}$ de R^5 adaptables a $\bar{B}^5(0)$, $c_j=(V_j, \varphi_j, R^5)$ verificándose para cada j:

a) $V_i\cap V_j=\emptyset$ si $i\neq j$.

b) $0\in\varphi_j(V_j)$ y $\varphi_j(V_j)$ es un subconjunto convexo, abierto y acotado de R^5.

c) $\varphi_j(V_j\cap\bar{B}^5(0)) = \varphi_j(V_j)\cap R^5_+$.

Sea $j \in \{1,\dots,r\}$, tomemos $S^1_j = \{ \bar{x}=(x_1,x_2,0,0,0)\in R^5 : x_1^2+x_2^2=\delta_j\} \subset \varphi_j(V_j)$ (se elige δ_j suficientemente pequeño para que $S^1_j\subset\varphi_j(V_j)$) y S^2_j esfera bidimensional contenida en $[((0,0)\times R^3_-)\cap\varphi_j(V_j)]\setminus R^5_+$. Definimos $S^1_j * S^2_j = \{ t\bar{x}+(1-t)\bar{y} : t\in I, \bar{x}\in S^1_j, \bar{y}\in S^2_j \}$. Se tiene que $S^1_j * S^2_j$ es homeomorfa a S^4 (ver [16]). Es evidente que $(S^1_j*S^2_j)\cap R^5_+ = S^1_j$.

Como consecuencia del Teorema de Separación de Jordan, existe U_j subconjunto abierto de R^5 tal que $\partial U_j = S^1_j*S^2_j$, $U_j \subset \varphi_j(V_j)\cap R^5_-$ (U_j es la componente conexa acotada de $R^5\setminus(S^1_j*S^2_j)$). Así, $\varphi_j^{-1}(S^1_j*S^2_j) = \partial\varphi_j^{-1}(U_j)$ (homeomorfo a S^4). Sea $D_j = \varphi_j^{-1}(\bar{U}_j)$, por la construcción, $D_j\cap\bar{B}^5(0) = \varphi_j^{-1}(S^1_j)$, dado que $\varphi_j(V_j\cap\bar{B}^5(0)) = \varphi_j(V_j)\cap R^5_+$ y $\bar{U}_j\cap R^5_+ = S^1_j$.

Por el Lema III.3.4 existe una isotopía $H: S^4\times I \longrightarrow S^4$ tal que $H_0=Id$ y $H_1(\varphi_j^{-1}(S^1_j)) = M_j$ $j\in\{1,\dots,r\}$. Extendemos $\bar{H}: ((\bar{B}^5(0)\times\{0\})\cup(S^4\times I)) \longrightarrow \bar{B}^5(0)$ definida por $\bar{H}(x,0)=x$ si $x\in\bar{B}^5(0)$ y $\bar{H}(x,t)=H(x,t)$ si $(x,t)\in S^4\times I$, a una aplicación continua $\tilde{H}: (\bar{B}^5(0)\times I, S^4\times I) \longrightarrow (\bar{B}^5(0), S^4)$ y consideramos la homotopía $h\circ\tilde{H}: (\bar{B}^5(0)\times I, S^4\times I) \longrightarrow (R^4, R^4\setminus\{0\})$. Entonces, $d(h\circ\tilde{H}_1, B^5(0))\neq 0$ al ser $d(h\circ\tilde{H}_0, B^5(0)) = d(h\circ\tilde{H}_1, B^5(0))$ y $h\circ\tilde{H}_0=h$. Por tanto, si escribimos $h\circ\tilde{H}_1(x) = ((g_3\circ\tilde{H}_1)(x), (h_4\circ\tilde{H}_1)(x)) \in R^3\times R$, concluimos que $g_3\circ\tilde{H}_1$ se puede G-complementar, además $((g_3\circ\tilde{H}_1)|_{S^4})^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^{r}\varphi_j^{-1}(S^1_j)$.

Ahora definimos $f:\overline{B}^5(0)\cup(\bigcup_{j=1}^{r}D_j)\longrightarrow\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} g_3\circ\tilde{H}_1(x) & \text{si } x\in\overline{B}^5(0) \\ 0 & \text{si } x\in\bigcup_{j=1}^{r}D_j \end{cases}.$$

Se tiene que f es continua porque $\overline{B}^5(0)\cap D_j=\varphi_j^{-1}(S_j^1)$ $j\in\{1,\dots,r\}$.

Por otro lado $(h_4\circ\tilde{H}_1)\Big|_{\bigcup_{j=1}^{r}\varphi_j^{-1}(S_j^1)}$ nunca se anula, por tanto $(h_4\circ\tilde{H}_1)\Big|_{\varphi_j^{-1}(S_j^1)}$ tiene signo constante y del hecho de que $\varphi_j^{-1}(S_j^1)$ es compacto, se tiene que $\mathrm{Im}(h_4\circ\tilde{H}_1)\Big|_{\varphi_j^{-1}(S_j^1)}\subset[a_j,b_j]$ y $0\notin[a_j,b_j]$, esto nos permite extender $(h_4\circ\tilde{H}_1)\Big|_{\varphi_j^{-1}(S_j^1)}$ a todo D_j sin que la extensión se anule nunca. Denotamos por L_j a dicha extensión continua. Sea $L:\overline{B}^5(0)\cup(\bigcup_{j=1}^{r}D_j)\longrightarrow\mathbb{R}$ la aplicación continua definida por $L(x)=\begin{cases} (h_4\circ\tilde{H}_1)(x) & \text{si } x\in\overline{B}^5(0) \\ L_j(x) & \text{si } x\in D_j \end{cases}.$

La aplicación continua $(f,L):\overline{B}^5(0)\cup(\bigcup_{j=1}^{r}D_j)\longrightarrow\mathbb{R}^4$, no se anula en el borde de $\overline{B}^5(0)\cup(\bigcup_{j=1}^{r}D_j)$ y $(f,L)^{-1}(0)\subset B^5(0)$. Así, por la propiedad de escisión, $d((f,L),B^5(0)\cup(\bigcup_{j=1}^{r}\mathring{D}_j))=d((f,L),B^5(0))\neq0$ y por tanto f se puede G-complementar. Sin embargo, $f^{-1}(0)\cap\partial(\overline{B}^5(0)\cup(\bigcup_{j=1}^{r}D_j))=\bigcup_{j=1}^{r}\varphi_j^{-1}(S_j^1\times S_j^2)$ y cada $\varphi_j^{-1}(S_j^1\times S_j^2)$ es homeomorfo a S^4. ∎

Observación

La construcción anterior se puede realizar de la misma manera partiendo de un elemento $[\varphi]$ no nulo de $\Pi_n(S^{n-1})$ $(n\geq 3)$ y se obtiene que para todo $n\geq 3$, existen un abierto acotado, U, de R^{n+1} y una aplicación continua $f:\bar{U}\longrightarrow R^{n-1}$ que puede ser G-complementada, pero no complementada.

A continuación, puesto que en general existen aplicaciones que no se pueden complemeantar en un abierto dado pero si G-complementar, vamos a investigar si pueden obtenerse resultados análogos a lo de los Teoremas IV.1.2, IV.1.3 y IV.1.4. Para ello necesitaremos algunos resultados del Capítulo III, así como algunas definiciones y teoremas recogidos en [19]. Posteriormente se darán aplicaciones a la teoría de la bifurcación multiparamétrica.

Primero vamos a enunciar y demostrar una proposición análoga al Teorema IV.1.2 para G-complementación. Es necesario imponer alguna condición adicional.

Proposición IV.1.8

Sean U un subconjunto abierto y acotado de R^{n+m+k}, tal que ∂U es una subvariedad de dimensión n+m+k-1 de R^{n+m+k}, $f:\bar{U}\longrightarrow R^m$ una aplicación de clase C^∞ con $0\in(\text{v.r.})(f)\cap(\text{v.r.})(f|_{\partial U})$ y $f^{-1}(0)\cap\partial U\neq\emptyset$. Si $\Pi_{n+m+k}(S^{n+m})\neq 0$, $\delta:\Pi^{n-1}(\partial f^{-1}(0))\longrightarrow\Pi^n(f^{-1}(0),\partial f^{-1}(0))$ es epimorfismo y $n\geq k+2$ o $k=1$, se tiene que f se puede G-complementar por una aplicación $\tilde{g}:\bar{U}\longrightarrow R^n$.

Antes de hacer la demostración nos es conveniente el siguiente lema.

Lema IV.1.9

En las condiciones anteriores, $d((\tilde{g},f),U) = d((\tilde{g}\circ r,f),W)$, donde W es un entorno tubular de $f^{-1}(0)$ en $\bar{U}$ y $r\colon W \longrightarrow f^{-1}(0)$ es la retracción usual.

Demostración

Por la propiedad de escisión se tiene que $d((\tilde{g},f),U) = d((\tilde{g},f),W)$. Sean $\nu(f^{-1}(0))$ el fibrado normal de $f^{-1}(0)$ en $\bar{U}$, D un entorno abierto de la sección cero y $exp\colon D \longrightarrow W$ el difeomorfismo exponencial.

Sea $H\colon D\times I \longrightarrow R^{n+m}$ la aplicación definida por $H(x,v_x,t) = ((\tilde{g}\circ exp)(x,tv_x),(f\circ exp)(x,v_x))$. Se verifica que H solo se anula en $\mathrm{Int}(f^{-1}(0))$ y por tanto $d(H_0\circ exp^{-1},W) = d(H_1\circ exp^{-1},W) = d((\tilde{g},f),W)$.

Como $H_0\circ exp^{-1} = (\tilde{g}\circ r,f)$ se concluye la demostración.■

Demostración de IV.1.8

Como $0\in(\mathrm{v.r.})(f)\cap(\mathrm{v.r.})(f|_{\partial U})$, se tiene que $f^{-1}(0)$ es una subvariedad bien situada, de dimensión $n+k$, de $\bar{U}$ que será denotada por M^{n+k} y ∂M^{n+k} denotará a $\partial f^{-1}(0) = f^{-1}(0)\cap\partial U \neq \emptyset$ (obsérvese que M^{n+k} es subvariedad de R^{n+m+k}). Sea $V=\{v_1,\dots,v_m\}$ la familia de secciones de clase C^∞, linealmente independientes, del fibrado normal de M^{n+k} en R^{n+m+k}, dada por $Df(x)(v_j(x) = e_j$ para todo $j=1,\dots,m$ y todo $x\in M^{n+k}$.

Consideremos $g\colon(M^{n+k},\partial M^{n+k}) \longrightarrow (R^n,S^{n-1})$ aplicación de clase C^∞ con $0\in(\mathrm{v.r.})(g)$. Asociado a g, tenemos $M^k=g^{-1}(0)$, subvariedad sin borde de M^{n+k}, contenida en $\mathrm{Int}(M^{n+k}) \subset \mathring{W} \subset U$, y $F_g = \{w_1, \ldots, w_n\}$ familia de secciones C^∞, linealmente independientes, del fibrado normal de M^k en M^{n+k}, y $[(M^k, F_g)] \in \mathfrak{F}^k(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$.

Sea $\tilde{g}: \bar{U} \longrightarrow R^n$ una extensión continua de g. En un primer paso vamos a ver que $d((\tilde{g}, f), U) = ((\Pi^k_{n+m})^{-1} \circ V^*_I)([(M^k, F_g)]) \in \Pi_{n+m+k}(S^{n+m})$ (ver Capítulo III), para lo cual es suficiente, en virtud del lema anterior, demostrar que $d((\tilde{g} \circ r, f), W) = ((\Pi^k_{n+m})^{-1} \circ V^*_I)([(M^k, F_g)])$.

En efecto: como $\tilde{g} \circ r = g \circ r$ se tiene que $\tilde{g} \circ r$ es de clase C^∞, $T(\tilde{g} \circ r) = T(g \circ r): TW \longrightarrow TR^n$ y $Tf: TW \longrightarrow TR^m$. Sabemos que $T_x f(v_i(x)) = \theta^x_{c_m}(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ y todo $x \in M^{n+k}$, donde $c_m = (R^m, \mathrm{Id}, R^m)$, y $T_x g(w_j(x)) = \theta^x_{c_n}(e_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ y todo $x \in M^k$, donde $c_n = (R^n, \mathrm{Id}, R^n)$.

Como $T_x(g \circ r, f)(w_j(x)) = (T_x(g \circ r)(w_j(x)), T_x f(w_j(x)) = (\theta^x_{c_n}(e_j), 0) = \theta^x_{c_{n+m}}(e_j)$, donde $c_{n+m} = (R^{n+m}, \mathrm{Id}, R^{n+m})$ $j = 1, \ldots, n$, dado que $T_x(g \circ r) = T_x g \circ T_x r$, $T_x(w_j(x)) = w_j(x)$, $T_x f(T_x M^{n+k}) = 0$.

Por otro lado $T_x(g \circ r, f)(v_i(x)) = (T_x g(T_x r(v_i(x))), T_x f(v_i(x))) = (0, \theta^x_{c_m}(e_i)) = \theta^x_{c_{n+m}}(e_{n+i})$ $i = 1, \ldots, m$, puesto que $T_x r(v_i(x)) = 0$ ya que $v_i(x) \in T_x r^{-1}(x)$ y $T_x r^{-1}(x) = \mathrm{Ker} T_x r$ (obsérvese que $r^{-1}(x)$ es una subvariedad, r es una sumersión en W).

Así, la referencia normal asociada a M^k, $F_{(\tilde{g} \circ r, f)}$, es $\{F_g, V\}$ (notemos que $M^k = g^{-1}(0) = (\tilde{g} \circ r, f)^{-1}(0)$), y por tanto $d((\tilde{g} \circ r, f), W) = ((\Pi^k_{n+m})^{-1} \circ V^*_I)([(M^k, F_g)])$.

Ahora, por el Corolario III.3.13, si $n \geq k+2$ o de la Prop.

III.3.8 si k=1, se deduce la existencia de $[(M^k_\bullet, F)] \in \mathfrak{J}^k(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$ tal que $V^\bullet_1([(M^k_\bullet, F)]) \neq 0$ (ya que $\Pi_{n+m+k}(S^{n+m}) \neq 0$). En consecuencia, si encontramos $g: (M^{n+k}, \partial M^{n+k}) \longrightarrow (R^n, S^{n-1})$ aplicación de clase C^∞ con $0 \in (v.r.)(g)$ y tal que $[(g^{-1}(0), F_g)] = [(M^k_\bullet, F)]$, extendiendo g a una aplicación continua $\tilde{g}: \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se tendrá que $\tilde{g}$ es un G-complemento para f y habremos concluido.

Como $\delta: \Pi^{n-1}(\partial M^{n+k}) \longrightarrow \Pi^n(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$ es un epimorfismo, por la Prop. III.1.14, existe $[(M^k_1, F_1)] \in \mathfrak{J}^k(\partial M^{n+k})$ tal que $\bar{\delta}([(M^k_1, F_1)]) = [(M^k_\bullet, F)]$. Por la demostración de III.1.14 existen $f_1: \partial M^{n+k} \longrightarrow S^{n-1}$ aplicación de clase C^∞ tal que $p \in (v.r.)(f_1)$ y $(f^{-1}(p), F_{f_1}) = (M^k_1, F_1)$ y existe $\tilde{f}_1: M^{n+k} \longrightarrow \bar{B}^n(0) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicación de clase C^∞ tal que $\tilde{f}_1|_{\partial M^{n+k}} = f_1$, $1/2\ p \in (v.r.)(\tilde{f}_1)$ y $[(M^k_\bullet, F)] = [(\tilde{f}_1^{-1}(1/2\ p), F_{\tilde{f}_1})]$. Ahora por el Teorema 3.1 (pag 185) de [17], existe una difeotopía $H: \bar{B}^n(0) \times I \longrightarrow \bar{B}^n(0)$ tal que $H|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$ y $H_1(1/2\ p) = 0$. Entonces, $g = H_1 \circ f_1: (M^{n+k}, \partial M^{n+k}) \longrightarrow (R^n, S^{n-1})$ cumple $0 \in (v.r.)(g)$ y $[(g^{-1}(0), F_g)] = [(M^k_\bullet, F)]$, lo que termina la demostración de la Proposición IV.1.8.∎

Observación

En la proposición anterior, la condición $\Pi_{n+m+k}(S^{n+m}) \neq 0$ es imprescindible y pedir que $\delta: \Pi^{n-1}(\partial M^{n+k}) \longrightarrow \Pi^n(M^{n+k}, \partial M^{n+k})$ sea un epimorfismo, que no se requiere para el caso k=0 en el teorema

IV.1.2, es una condición que se cumple automáticamente si $k=0$ dado que para todo $m\in\mathbb{Z}$ existe $g:(M^n,\partial M^n)\longrightarrow(\overline{B}^n(0),S^{n-1})$ con $d(g)=m$. Por tanto, las condiciones adicionales requeridas en IV.1.8 son totalmente naturales.

Para continuar, son necesarias algunas definiciones y resultados recogidos en [19].

Definición IV.1.10 ([19], pag 386-387 y 400)

E, G denotarán espacios de Banach, U un subconjunto abierto de E y S un subconjunto arbritrario de E.

a) Sea $g:U\longrightarrow G$ una aplicación continua. Se dice que g es admisible en $S\cap U$, si existe un subconjunto abierto y acotado de E, V_0, tal que $g^{-1}(0)\cap S\subset V_0\subset\overline{V}_0\subset U$.

Sea $g:\overline{U}\longrightarrow G$ una aplicación continua. Se dice que g es admisible en $S\cap\overline{U}$ si existe un subconjunto abierto y acotado de E, V_0, tal que $g^{-1}(0)\cap S\subset V_0\subset U$.

b) Sea $g:U(\overline{U})\longrightarrow G$ admisible en $S\cap U$ $(S\cap\overline{U})$. Diremos que g es *0-epi* en $S\cap U$ $(S\cap\overline{U})$ si la ecuación $g(x)=h(x)$ tiene una solución en $S\cap U$ para toda aplicación compacta $h:E\longrightarrow G$ con $\mathrm{Sop}h$ acotado y contenido en U ($\{x\in E:h(x)\neq 0\}\subset U$ o equivalentemente $\mathrm{Sop}h\subset\overline{U}$ y $h(x)=0$ para todo $x\in\partial U$). ($\mathrm{Sop}h$ denota la adherencia del conjunto $\{x\in E:h(x)\neq 0\}$).

c) Sea $g:U(\overline{U})\longrightarrow G$ admisible en $S\cap U$ $(S\cap\overline{U})$. Se dice que g es *0-esencial* en $S\cap U$ $(S\cap\overline{U})$ si para todo abierto acotado V tal que $g^{-1}(0)\cap S\subset V\subset\overline{V}\subset U$ $(g^{-1}(0)\cap S\subset V\subset U)$ toda extensión continua $\tilde{g}:\overline{V}\longrightarrow G$ de $g|_{\partial V}$, con $g-\tilde{g}$ compacta en $\overline{V}$, tiene un cero en $S\cap V$.

d) Una familia de secciones de G es una colección $\mathfrak{M}$ de subespacios finito-dimensionales de G tal que :

i) Existe $M_0 \in \mathfrak{M}$, fijo, tal que para cada $M \in \mathfrak{M}$, $M_0 \subset M$.

ii) Si M_1, $M_2 \in \mathfrak{M}$ existe $M_3 \in \mathfrak{M}$ tal que $M_1, M_2 \subset M_3$.

iii) $\overline{\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M} = G$.

e) Consideremos $\mathfrak{M}$, familia de secciones de G, fija. Sea $g: U(\bar{U}) \longrightarrow G$ admisible en $S \cap U$ $(S \cap \bar{U})$. Diremos que g es *seccionalmente 0-epi* en $S \cap U$ $(S \cap \bar{U})$ si la ecuación $g(x) = h(x)$ tiene una solución en $S \cap U$ para toda aplicación acotada $h: E \longrightarrow M$ con soporte acotado contenido en U $(\{x \in E: h(x) \neq 0\} \subset U)$ y para todo $M \in \mathfrak{M}$. Es decir, si escribimos g como $g = (g_M, g_N)$ entonces, g_M es 0-epi en $g_N^{-1}(0) \cap S \cap U$ $(g_N^{-1}(0) \cap S \cap \bar{U})$ donde N es tal que $G = M \oplus N$.

f) Sea $g: U(\bar{U}) \longrightarrow G$ admisible en $S \cap U$ $(S \cap \bar{U})$. Se dice que g es *seccionalmente 0-esencial* en $S \cap U$ $(S \cap \bar{U})$ si para todo conjunto abierto y acotado V con $g^{-1}(0) \cap S \subset V \subset \bar{V} \subset U$ $(g^{-1}(0) \cap S \subset V \subset U)$ y toda extensión continua $\tilde{g}: \bar{V} \longrightarrow G$ de la restricción $g|_{\partial V}: \partial V \longrightarrow G \setminus \{0\}$ con $g - \tilde{g}$ acotada en $\bar{V}$ y $(g - \tilde{g})(V) \subset M$ para algún $M \in \mathfrak{M}$, tiene un cero en $S \cap V$, es decir, g_M es 0-esencial en $g_N^{-1}(0) \cap S \cap U$ $(g_N^{-1}(0) \cap S \cap \bar{U})$ donde $G = M \oplus N$ y $g = (g_M, g_N)$.

g) Sea X un subconjunto cerrado de E. Una aplicación continua $g: X \longrightarrow G$ se llama:

i) *Seccionalmente acotada* en X, si para cada $M \in \mathfrak{M}$ $g_M(g_N^{-1}(0) \cap X)$ es acotado, donde N es tal que $G = M \oplus N$ y $g = (g_M, g_N)$.

ii) *Seccionalmente propia* si para cada $M \in \mathfrak{M}$ y cada compacto $K \subset M$, $g^{-1}(K \times \{0\})$ es compacto.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados más importantes que utilizaremos posteriormente.

Proposición IV.1.11 ([19], pags. 388 y 401)

a) Sea $g:U(\bar{U})\longrightarrow G$ admisible en $S\cap U$ ($S\cap\bar{U}$). Se verifica que g es 0-epi en $S\cap U$ ($S\cap\bar{U}$) si y solamente si g es 0-esencial en $S\cap U$ ($S\cap\bar{U}$).

b) Sea $g:U(\bar{U})\longrightarrow G$ admisible en $S\cap U$ ($S\cap\bar{U}$). Se verifica que g es seccionalmente 0-epi en $S\cap U$ ($S\cap\bar{U}$) si y solo si g es seccionalmente 0-esencial en $S\cap U$ ($S\cap\bar{U}$).

Proposición IV.1.12 ([19], pag. 393)

Sean G_i $i=1,2$ dos espacios de Banach, $g_i:U\longrightarrow G_i$ $i=1,2$ dos aplicaciones continuas. Definimos $g:U\longrightarrow G_1\times G_2$ por $g(x)=(g_1(x),g_2(x))$. Si g es 0-epi en $S\cap U$ ($S\cap\bar{U}$) se verifica que g_2 es 0-epi en $g_1^{-1}(0)\cap S\cap U$ ($g_1^{-1}(0)\cap S\cap\bar{U}$).

Proposición IV.1.13 ([19], pag. 405)

a) Sea U acotado, $S\cap\bar{U}$ cerrado y $g:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ acotada en $\bar{U}$. Si g es 0-epi en $S\cap\bar{U}$ se tiene que $\dim(S\cap\bar{U})\geq n$ y $\dim(S\cap\partial U)\geq n-1$.

b) Sea U acotado, $g:\bar{U}\longrightarrow G$ seccionalmente acotada y seccionalmente 0-epi en $S\cap\bar{U}$. Si $\dim G=\infty$ entonces, $\dim(S\cap\bar{U})=\dim(S\cap\partial U)=\infty$. (La dimensión que se utiliza es la dimensión por recubrimientos).

Teorema IV.1.14 ([19], pags. 407-408)

Sean S un subconjunto cerrado de U, $g:U\longrightarrow G$ seccionalmente 0-epi en $S\cap U$. Supongamos que g es seccionalmente acotada y seccionalmente propia en todos los subconjuntos cerrados y acotados (en E) de $S\cap U$. Entonces, existe un cerrado minimal, conexo, en U, $\Sigma\subset S\cap U$, tal que:

a) g es seccionalmente 0-epi en $\Sigma\cap U=\Sigma$. Esto significa, en particular, que $g^{-1}(0)\cap\Sigma\neq\emptyset$, Σ es no acotado ó $\bar{\Sigma}\cap\partial U\neq\emptyset$, $\dim\Sigma\geq\dim(\Sigma\cap\bar{V})\geq\dim G$ y $\dim(\Sigma\cap\partial U)\geq\dim G-1$ para todo abierto y acotado V, tal que $g^{-1}(0)\cap S\subset V\subset\bar{V}\subset U$.

b) Si g está definida en $\bar{U}$ y $g(x)\neq 0$ en $\bar{\Sigma}\cap\partial U$ y g es seccionalmente propia y seccionalmente acotada en todos los subconjuntos acotados y cerrados de $\bar{\Sigma}\cap\bar{U}$, se tiene que g es seccionalmente 0-epi en $\bar{\Sigma}\cap\bar{U}=\bar{\Sigma}$ y no existe un subconjunto cerrado, propio, de $\bar{\Sigma}\cap\bar{U}$ en el que g sea seccionalmente 0-epi, es decir, Σ es minimal. Además $\dim(\bar{\Sigma}\cap\partial V)\geq\dim G$, para todo abierto y acotado V con $g^{-1}(0)\cap\Sigma\subset V\subset U$ (se puede tomar V=U si $\bar{\Sigma}\cap\bar{U}$ es acotado).

Teorema IV.1.15 ([19], pag. 395)

Sean $g:\bar{U}\longrightarrow G$ una aplicación continua 0-epi en el conjunto acotado $S\cap\bar{U}$ y $H:(S\cap\partial U)\times I\longrightarrow G$ una aplicación compacta con $H(x,0)=0$ en $S\cap\partial U$. Supongamos que $g(x)\neq H(x,t)$ en $(S\cap\partial U)\times I$. Entonces, $g-\tilde{h}$ es 0-epi en $S\cap\partial\bar{U}$ para toda extensión $\tilde{h}$ de H_1 a $\bar{U}$ que sea compacta sobre $S\cap\bar{U}$.

Lema IV.1.16

Sean U un subconjunto abierto de $R^m\times E$ con $p_1(U)$ acotado en R^m, $h:\bar{U}\longrightarrow E$ una aplicación continua de la forma $h(\lambda,x) = x-h_1(\lambda,x)$ con $h_1:\bar{U}\longrightarrow E$ compacta y tal que $h(\partial U)\subset E\setminus\{0\}$. Entonces, si $d(h,U)\neq 0$ se tiene que h es 0-epi en U y en $\bar{U}$ (y por tanto es 0-esencial en U y en $\bar{U}$).

Demostración

Como h es propia (II.1.4) y $h(\partial U)\subset E\setminus\{0\}$, por la normalidad de E se deduce que h es admisible en U y $\bar{U}$ (S=E).

Sea $F:\mathbb{R}^m\times E \longrightarrow E$ una aplicación compacta con Sop$F$ acotado y contenido en U ó $\{ (\lambda,x) \in \mathbb{R}^m\times E : F(\lambda,x)\neq 0 \} \subset U$. En particular, se tiene que en ambos casos $F|_{\partial U}=0$. Hemos de ver que existe $(\lambda,x)\in U$ tal que $h(\lambda,x) = F(\lambda,x)$. Para ello se considera $H:\bar{U}\times I \longrightarrow E$ definida por $H((\lambda,x),t) = h(\lambda,x)-tF(\lambda,x) = x-(h_1(x)+tF(\lambda,x))$. Si $(\lambda,x)\in\partial U$ se verifica que $H((\lambda,x),t) = h(\lambda,x) \neq 0$ y por tanto por II.1.9 $d(h,U) = d(H_1,U)$ y $d(H_1,U)\neq 0$. Como consecuencia, por II.1.10, existe $(\lambda_0,x_0)\in U$ tal que $H_1(\lambda_0,x_0)=0$. Es claro que $h(\lambda_0,x_0) = F(\lambda_0,x_0)$.■

Corolario IV.1.17

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m\times E$ xon $p_1(U)$ acotado en $\mathbb{R}^m$, $f:\bar{U}\subset\mathbb{R}^m\times E \longrightarrow E$ una aplicación continua de la forma $f(\lambda,x) = x-F(\lambda,x)$ donde $F:\bar{U} \longrightarrow E$ es una aplicación compacta y $g:\bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^s$ una aplicación compacta con $s\leq m$ G-complemento para f. Se verifica que g es 0-epi en $f^{-1}(0)\cap U$ y en $f^{-1}(0)\cap\bar{U}$ (y f es 0-epi en $g^{-1}(0)\cap U$ y $g^{-1}(0)\cap\bar{U}$).

Demostración

De $d((g,f),U)\neq 0$, por el Lema IV.1.16, obtenemos que (g,f) es 0-epi en U y $\bar{U}$. Ahora basta aplicar la Prop. IV.1.12.■

Corolario IV.1.18

Sean U, f y g como en IV.1.17 con U acotado en $\mathbb{R}^m\times E$. Se verifica:

a) $\dim(f^{-1}(0)\cap\bar{U})\geq s$ y $\dim(f^{-1}(0)\cap\partial U)\geq s-1$.

b) $\dim(g^{-1}(0)\cap\bar{U}) = \dim(g^{-1}(0)\cap\partial U) = \infty$ (si $\dim E=\infty$).

Demostración

Es consecuencia directa de IV.1.17 y de IV.1.13, puesto que si f es 0-epi en $g^{-1}(0)\cap\bar{U}$ también es seccionalmente 0-epi en $g^{-1}(0)\cap\bar{U}$. ∎

Lema IV.1.19

En las hipótesis del Corolario IV.1.17, se verifica que $g|_{f^{-1}(0)\cap\bar{U}}$ es propia.

Demostración

Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^s$. Es claro que $K\times\{0\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^s\times E$. Por el Lema II.1.4 $(g,f)^{-1}(K\times\{0\})$ es un subconjunto compacto de $\bar{U}$. Como $(g,f)^{-1}(K\times\{0\}) = \{x\in\bar{U}: g(x)\in K, f(x)=0\} = g^{-1}(K)\cap f^{-1}(0)\cap\bar{U} = (g|_{f^{-1}(0)\cap\bar{U}})^{-1}(K)$, se tiene que $(g|_{f^{-1}(0)\cap\bar{U}})^{-1}(K)$ es compacto y por tanto $g|_{f^{-1}(0)\cap\bar{U}}$ es propia. ∎

Corolario IV.1.20

En las hipótesis del Corolario IV.1.17, con U acotado en $\mathbb{R}^s\times E$, existe un subconjunto conexo, cerrado (minimal) Σ de $f^{-1}(0)$ tal que g es 0-epi en $\Sigma\cap\bar{U}$ y por tanto $\dim(\Sigma\cap\bar{U})\geq s$, $\dim(\Sigma\cap\partial U)\geq s-1$ y g es 0-esencial en $\Sigma\cap\bar{U}$.

Demostración

Basta tener en cuenta el Lema IV.1.19, el Corolario IV.1.17 y

Prop. IV.1.13 y tomar $\Sigma=\bar{\Sigma}$ del Teorema IV.1.14 *b*).■

Bifurcación local

Sean E un espacio de Banach, U un abierto de $\mathbb{R}^k \times E$ tal que $U\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})\neq\emptyset$ y $f:U\longrightarrow E$ una aplicación continua. Supongamos que $f(\lambda,0)=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}^k$ tal que $(\lambda,0)\in U$.

Consideremos la ecuación $f(\lambda,x)=0$. Los puntos de la forma $(\lambda,0)\in U$ se llaman *soluciones triviales* de la ecuación. Las restantes soluciones se llaman *no triviales*.

Definición IV.1.21

Sea f como antes y $\lambda_0\in\mathbb{R}^k$ tal que $(\lambda_0,0)\in U$. Se dice que λ_0 es un *punto de bifurcación* de la ecuación $f(\lambda,x)=0$ si todo entorno de $(\lambda_0,0)$ contiene soluciones no triviales de la ecuación.

Proposición IV.1.22

Sean E un espacio de Banach, U un abierto de $\mathbb{R}^k\times E$ con $U\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})\neq\emptyset$ y $f:U\longrightarrow E$ una función continua de la forma $f(\lambda,x) = x-F(\lambda,x)$, donde $F:U\longrightarrow E$ es una aplicación compacta. Supongamos que $f(\lambda,0)=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}^k$, con $(\lambda,0)\in U$, y que existan $(\lambda_0,0)\in U$ y $\varepsilon_0>0$ tales que $f(\lambda,x)\neq0$ si $(\lambda,x)\in S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times(\bar{B}^E_{\varepsilon_0}(0)\setminus\{0\})\subset U$ ($S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0) = \{ \lambda\in\mathbb{R}^k : \|\lambda-\lambda_0\|=\varepsilon_0 \}$ la frontera de $\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(0) = \{ \lambda\in\mathbb{R}^k : \|\lambda-\lambda_0\|\leq\varepsilon_0 \}$ y $\bar{B}^E_{\varepsilon_0}(0) = \{ x\in E : \|x\|\leq\varepsilon_0 \}$).

Consideremos la restricción de f a $\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_0}(0)$ (y la seguimos denotando igual). Si existe una sucesión de números reales positivos, menores o iguales que ε_0, $\{\varepsilon_m\}_{m\in N}$, convergente a cero, tal que para cada $m\in N$ existe $g_m:\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)\longrightarrow R$ si $k\geq 2$ (o R^2 si $k\geq 3$), G-complemento para f, se verifica que existe $\lambda^*\in\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)$ punto de bifurcación de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.

Demostración

Sea $m\in N$ y $g_m:\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)\longrightarrow R$ (o R^2) G-complemento para $f|_{\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)}$. Como g es compacta, por el Corolario IV.1.17, se tiene que g_m es 0-epi en $f^{-1}(0)\cap(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0))$.

Como $\partial(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)) = S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0) \cup \bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times S^E_{\varepsilon_m}(0)$ $(S^E_{\varepsilon_m}(0) = \{ x\in E : \|x\|=\varepsilon_m \})$, y $f(\lambda,x)\neq 0$ si $(\lambda,x)\in S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times(\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)\setminus\{0\})$, se tiene que $f^{-1}(0)\cap\partial(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0))=(S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\})\cup(f^{-1}(0)\cap(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times S^E_{\varepsilon_m}(0)))$. Si $f^{-1}(0)\cap(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times S^E_{\varepsilon_m}(0))=\emptyset$ se tendría pues, que $f^{-1}(0)\cap\partial(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)) = S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}$. Consideremos

$g_m|_{S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}}:S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}\longrightarrow R\setminus\{0\}$ (o $R^2\setminus\{0\}$). Por la hipótesis sobre k, existe una homotopía $\bar{H}:S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}\times I\longrightarrow R\setminus\{0\}$ (o $R^2\setminus\{0\}$) tal que $\bar{H}_0(x)=g_m(x)$ y $\bar{H}_1(x)=x_0$ para todo x. Si definimos $H:S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}\times I\longrightarrow R$ (o R^2) por $H(x,t) = g_m(x)-\bar{H}(x,t)$, se tiene que $H(x,0)=0$ para todo $x\in S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}$ y

$g_m(x)-H(x,t) = \bar{H}(x,t)\neq 0$ en $S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}\times I$ y por tanto $g_m(x)\neq H(x,t)$ en $S^{k-1}_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\{0\}\times I$. Aplicando el Teorema IV.1.15 se deduce que $g_m-\tilde{h}$ es 0-epi en $f^{-1}(0)\cap(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0))$ para toda extensión $\tilde{h}$ a $\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)$ de H_1. Como $\tilde{h}=g_m-x_0$ es una extensión a $\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0)$ de H_1, se tendría que $x_0=g_m-(g_m-x_0)=g_m-\tilde{h}$ sería 0-epi en $f^{-1}(0)\cap(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times\bar{B}^E_{\varepsilon_m}(0))$, lo cual es absurdo. En consecuencia, $f^{-1}(0)\cap(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times S^E_{\varepsilon_m}(0))\neq\emptyset$.

Hemos visto que para cada $m\in\mathbb{N}$ existe $(\lambda_m,x_m)\in(\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)\times S^E_{\varepsilon_m}(0))$, solución de la ecuación $f(\lambda,x)=0$ y como $x_m\in S^E_{\varepsilon_m}(0)$ (λ_m,x_m) es una solución no trivial de dicha ecuación. Sea $\lambda^*\in$ Acumulación$\{\lambda_m : m\in\mathbb{N}\}$. Es claro que $\lambda^*\in\bar{B}^k_{\varepsilon_0}(\lambda_0)$ es un punto de bifurcación de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.■

Sea $f: S^{k-1}\times S^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ una aplicación continua. Consideremos $\psi:\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^n(0)\longrightarrow\mathbb{R}$ una aplicación continua tal que

a) $\psi(x,y)>0$ si $(x,y)\in S^{k-1}\times\bar{B}^n(0)$

b) $\psi(x,y)<0$ si $(x,y)\in\bar{B}^k(0)\times S^{n-1}$

(en particular, si $(x,y)\in S^{k-1}\times S^{n-1}$, $\psi(x,y)=0$).

Extendemos f a una función continua $\hat{f}:\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^n(0)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y definimos $F:(\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^n(0),\partial(\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^n(0)))\longrightarrow(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})$ por $F(x,y) = (\hat{f}(x,y),\psi(x,y))$. La clase de homotopía de F no depende de la extensión $\hat{f}$ de f ni de la elección de ψ (con tal que verifique a) y b)). La fórmula $\hat{\chi}([f]) = d(F,\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^n(0))$ define una aplicación $\hat{\chi}:[S^{k-1}\times S^{n-1};\mathbb{R}^n\setminus\{0\}]\longrightarrow\Pi_{n+k}(S^{n+1})$ (ver [15], pags. 66-67).

Proposición IV.1.23 ([15], pag. 70)

Sea $f:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua, tal que $f(\lambda,0)=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}^k$ y $f(S^{k-1}\times(\bar{B}^n(0)\setminus\{0\}))\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ (por tanto $f=f|_{S^{k-1}\times S^{n-1}}:S^{k-1}\times S^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$). Si $\hat{\chi}([f])\neq 0$, se tiene que existe $\lambda_0\in\bar{B}^k(0)$ punto de bifurcación de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.

De hecho, en la demostración de la Prop. IV.1.23, se puede observar que de la hipótesis $\hat{\chi}([f])\neq 0$ se deduce la existencia de una succesión $\{\varepsilon_m\}\longrightarrow 0$ y aplicaciones $g_m:\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^n_{\varepsilon_m}(0)\longrightarrow\mathbb{R}$ continuas, $m\in\mathbb{N}$, G-complementos de f (ver Prop. IV.1.22 y Prop. IV.1.27).

A continuación vamos a concentrar nuestro interés en encontrar condiciones que nos permitan asegurar que $\hat{\chi}([f])\neq 0$, sin necesidad de pasar por la función auxiliar ψ.

Consideremos $f:S^{k-1}\times S^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ una aplicación continua y $\bar{f}:S^{k-1}\times\bar{B}^n(0)\longrightarrow\mathbb{R}^m$ una extensión continua, cualquiera de f. Sea $H:S^{k-1}\times\bar{B}^n(0)\longrightarrow S^{n+k-1}\setminus\{q\}\subset S^{n+k-1}$ la aplicación definida por $H(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$. Obsérvese que H es un homeomorfismo sobre su imagen y que $H(S^{k-1}\times B^n(0))$ es un subconjunto abierto de S^{n+k-1} cuyo borde es $H(S^{k-1}\times S^{n-1})$, que es homeomorfo a $S^{k-1}\times S^{n-1}$.

Sea $U = (\varphi^{-1}_{n+k-1}\circ H)(S^{k-1}\times B^n(0))$. Se tiene que U es un abierto de $\mathbb{R}^{n+k-1}$ y $\partial U = (\varphi^{-1}_{n+k-1}\circ H)(S^{k-1}\times S^{n-1})$. Tenemos definida la aplicación continua $\bar{f}\circ H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1}:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\setminus\{0\})$. Definimos

$\delta(f) = d(\overline{f}\circ H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1},U) \in \Pi_{n+k-1}(S^s)$. Se verifica:

a) $\delta(f)$ no depende de la extensión continua $\overline{f}$ de f. En efecto: sean $\overline{f},\overline{f}':S^{k-1}\times\overline{B}^n(0)\longrightarrow R^s$ dos extensiones continuas de f. La homotopía $G:(\overline{U}\times I,\partial U\times I)\longrightarrow(R^s,R^s\setminus\{0\})$ definida por $G(x,t) = t\overline{f}\circ H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1}(x)+(1-t)\overline{f}'\circ H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1}(x)$ nos permite deducir que $d(\overline{f}\circ H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1},U) = d(\overline{f}'\circ H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1},U)$.

b) $\delta(f)$ solo depende de la clase de homotopía de la aplicación $f:S^{k-1}\times S^{n-1}\longrightarrow R^s\setminus\{0\}$. En efecto: sean $f,g:S^{k-1}\times S^{n-1}\longrightarrow R^s\setminus\{0\}$ dos aplicaciones continuas, homótopas mediante una homotopía $G:S^{k-1}\times S^{n-1}\times I\longrightarrow R^s\setminus\{0\}$. Tomamos $\overline{G}:S^{k-1}\times\overline{B}^n(0)\times I\longrightarrow R^s$ una extensión continua de G. La homotopía $\overline{G}(H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1}(\cdot),\cdot)$ y el apartado a) permiten afirmar que $\delta(f) = \delta(g)$.

En consecuencia, dada una aplicación continua $f:S^{k-1}\times S^{n-1}\longrightarrow R^s\setminus\{0\}$, para determinar $\delta(f)$ se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(S^{k-1}\times S^{n-1})\subset S^{s-1}$ puesto que la homotopía $G:S^{k-1}\times S^{n-1}\times I\longrightarrow R^s\setminus\{0\}$ definida por $G(x,t) = tf(x)+(1-t)\dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$ nos permite asegurar que $\delta(f) = \delta(\dfrac{f}{\|f\|})$ (y también que $\hat{\chi}([f]) = \hat{\chi}([\dfrac{f}{\|f\|}])$ si s=n).

Lema IV.1.24

Si $f:S^{k-1}\times S^{n-1}\longrightarrow R^n\setminus\{0\}$ es una aplicación continua, se tiene que $\hat{\chi}([f]) = \Sigma(\delta(f))$.

Demostración

Por la observación anterior, podemos suponer que $\mathrm{Im}f\subset S^{n-1}$. La aplicación $H:S^{k-1}\times B^n(O)\longrightarrow S^{n+k-1}$ es la restricción a $S^{k-1}\times \bar{B}^n(O)$ del homeomorfismo, que continuamos denotando por H, $H:(\bar{B}^k(O)\times S^{n-1})\cup(S^{k-1}\times \bar{B}^n(O))\longrightarrow S^{n+k-1}$ definido por $H(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$.

El homeomorfismo $\varphi_{n+k-1}:\mathbb{R}^{n+k-1}\longrightarrow S^{n+k-1}\setminus\{q\}$ verifica que $\varphi_{n+k-1}(\bar{B}^{n+k-1}(O)) = E_-^{n+k-1}$. Extendemos f a una aplicación continua $\tilde{f}:(\bar{B}^k(O)\times S^{n-1})\cup(S^{k-1}\times \bar{B}^n(O))\longrightarrow S^n$ tal que $\tilde{f}(B^k(O)\times S^{n-1})\subset \dot{E}_+^n\setminus S^{n-1}$, $\tilde{f}(S^{k-1}\times B^n(O))\subset E_-^n\setminus S^{n-1}$. Se verifica que $\delta(f) = [\tilde{f}\circ H^{-1}]$. Para verlo es suficiente recordar que por el Lema I.0.1 $\delta(f) = d(\tilde{f}\circ H^{-1}\circ\varphi_{n+k-1},U) = [h]$ donde $h:S^{n+k-1}\longrightarrow S^n$ es un extensión continua de $\varphi_n\circ\tilde{f}\circ H^{-1}|_{H(S^{k-1}\times S^{n-1})} = f\circ H^{-1}|_{H(S^{k-1}\times S^{n-1})}$ $(\varphi_n|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}})$, tal que $h(S^{n+k-1}\setminus\varphi_{n+k-1}(\bar{U}))\subset S^n\setminus\{p\}$ y $h(\varphi_{n+k-1}(\bar{U}))\subset S^n\setminus\{q\}$. Es claro que $\tilde{f}\circ H^{-1}$ cumple las propiedades de una tal aplicación h.

Ahora definimos $W:(\bar{B}^k(O)\times\bar{B}^n(O))\setminus\{O\}\longrightarrow S^{n+k-1}$ por $W(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$. Es claro que $W|_{(\bar{B}^k(O)\times S^{n-1})\cup(S^{k-1}\times\bar{B}^n(O))} = H$ y tomamos $\tilde{f}\circ H^{-1}\circ W:(\bar{B}^k(O)\times\bar{B}^n(O))\setminus B^{n+k}(O)\longrightarrow S^n$.

Sea $F:\bar{B}^k(O)\times\bar{B}^n(O)\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ una extensión continua de $\tilde{f}\circ H^{-1}\circ W$. Si escribimos $F(x,y) = (g(x,y),-\psi(x,y)) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, se tiene que $F|_{S^{k-1}\times\bar{B}^n(O)} = \tilde{f}$ y por tanto $\psi(x,y)>O$ para todo $(x,y)\in S^{k-1}\times B^n(O)$, y $F|_{\bar{B}^k(O)\times S^{n-1}} = \tilde{f}$ y por tanto $\psi(x,y)<O$ para todo $(x,y)\in B^k(O)\times S^{n-1}$. Como $F|_{S^{k-1}\times S^{n-1}} = (f,O)$, se verifica que g es

una extensión de f.

Por tanto, se tiene que $\hat{\chi}([f]) = d(F,B^k(0)\times B^n(0))$. Como $F(x,y)\neq 0$ para cada $(x,y) \in (\overline{B}^k(0)\times\overline{B}^n(0))\setminus B^{n+k}(0)$, por la propiedad de escisión, $\hat{\chi}([f]) = d(F,B^{n+k}(0))$, y deducimos que

$$\hat{\chi}([f]) = \Sigma([F|_{S^{n+k-1}}]) = \Sigma([\tilde{f}\circ H^{-1}\circ W|_{S^{n+k-1}}]) = \Sigma([\tilde{f}\circ H^{-1}]) =$$
$$= \Sigma(\delta(f)).\blacksquare$$

Corolario IV.1.25

Sea $f:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua tal que $f(\lambda,0)=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}^k$ y $f(S^{k-1}\times(\overline{B}^n(0)\setminus\{0\}))\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Si $k=3$ y $n\geq 2$ ó si $n\geq k+2$ y $\delta(f)\neq 0$, se tiene que existe $\lambda_0\in\mathbb{R}^k$, punto de bifurcación de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.

Demostración

Si $k=3$ ó $n\geq k+2$ el homomorfismo $\Sigma:\Pi_{n+k-1}(S^n)\longrightarrow\Pi_{n+k}(S^{n+1})$ es un isomorfismo y en consecuencia $\delta(f)\neq 0$ si y solamente si $\hat{\chi}([f])\neq 0$ (Lema IV.1.24). Ahora basta aplicar la Prop. IV.1.23.$\blacksquare$

La utilización de $\delta(f)$ en vez de $\hat{\chi}([f])$ presenta algunas ventajas en el estudio de problemas de bifurcación como son el trabajar en dimensiones mas bajas y no tener necesidad de utilizar la función ψ definida con anterioridad. Además se observa que una condición necesaria para que $\hat{\chi}([f])\neq 0$ es que $\delta(f)\neq 0$ y que en las hipótesis del Corolario IV.1.25, si $\delta(f)\neq 0$, f se puede G-complementar por $\psi:\overline{B}^k(0)\times\overline{B}^n(0)\longrightarrow\mathbb{R}$.

Como consecuencia del Corolario IV.1.25, también pueden ser extraidas interesantes relaciones entre los números de enlace de variedades y el problema de la bifurcación. Para ello enunciamos el siguiente lema.

Lema IV.1.26

Sean U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $g:(\bar{U},\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ una aplicación de clase C^1. Entonces, existe $\varepsilon>0$ tal que $h(d(g,U)) = L(g^{-1}(s_0),g^{-1}(s_1))$ para cualesquiera s_0 y s_1 valores regulares de g contenidos en $B^n_\varepsilon(0)$ (h denota el invariante generalizado de Hopf y L es número de enlace).

Demostración

Sea $\tilde{g}:V\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1, donde V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$ que contiene a $\bar{U}$ y $\tilde{g}|_{\bar{U}} = g$. Sea $\varepsilon=\frac{1}{2}\text{dist}(g(\partial U),0)$, es claro que $\bar{B}^n_\varepsilon(0)\subset\mathbb{R}^n\setminus g(\partial U)$. Haciendo V tan pequeño como haga falta, se puede suponer que $\tilde{g}(V\setminus U)\subset\mathbb{R}^n\setminus B^n_\varepsilon(0)$. Como $\mathcal{U} = \{\ \varphi_{n+k}(V),\ S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(\bar{U})\ \}$ es un recubrimiento abierto de S^{n+k}, existe $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{U}$. Definimos $K:S^{n+k}\longrightarrow S^n$ por $K(x) = \dfrac{\lambda_1(x)(\varphi_n\circ\tilde{g}\circ\varphi^{-1}_{n+k})(x)+\lambda_2(x)q}{\|\lambda_1(x)(\varphi_n\circ\tilde{g}\circ\varphi^{-1}_{n+k})(x)+\lambda_2(x)q\|}$. Es claro que K es una aplicación de clase C^1. Como $K|_{\varphi_{n+k}(\bar{U})} = \varphi_n\circ g\circ\varphi^{-1}_{n+k}$ y $K(S^{n+k}\setminus\varphi_{n+k}(\bar{U}))\subset S^n\setminus\{p\}$, se tiene que $d(g,U) = [K] \in \Pi_{n+k}(S^n)$. Por tanto $h(d(g,U)) = h([K]) = L(K^{-1}(s_0),K^{-1}(s_1))$ para cualesquiera s_0 y s_1 valores regulares de K. Observamos que $K^{-1}(\varphi_n(\bar{B}^n_\varepsilon(0))\subset\varphi_{n+k}(U)$

y como consecuencia $h([K]) = L(g^{-1}(s_0), g^{-1}(s_1))$ para cualesquiera s_0 y s_1 valores regulares de g contenidos en $B^n_\varepsilon(O)$.∎

Como consecuencia del lema anterior, se obtiene una condición suficiente para que el grado de una aplicación no sea nulo. Además en casos particulares este hecho puede ser aplicado al estudio de problemas de bifurcación, como lo indica el siguiente corolario.

Corolario IV.1.27

Sea $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(\lambda, O) = O$ si $\lambda \in \mathbb{R}^2$ y $f(S^1 \times (\bar{B}^2(O) \setminus \{O\})) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Sean $H: S^1 \times \bar{B}^2(O) \longrightarrow S^3$ definida por $H(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$, $U = (\varphi_3^{-1} \circ H)(S^1 \times B^2(O)) \subset \mathbb{R}^3$ y $\varepsilon = \frac{1}{2} \mathrm{dist}((f \circ H^{-1} \circ \varphi_3)(\partial U), O)$. Sean $a_0, a_1 \in B^2_\varepsilon(O)$ dos valores regulares cualesquiera de $f \circ H^{-1} \circ \varphi_3$. Si $L((f \circ H^{-1} \circ \varphi_3)^{-1}(a_0), (f \circ H^{-1} \circ \varphi_3)^{-1}(a_1))$ es impar, existe $\lambda_0 \in B^2(O)$ punto de bifurcación de la ecuación $f(\lambda, x) = O$.

Demostración

Es una consecuencia directa de que $\hat{\chi}([f]) = \Sigma(\delta(f)) = \Sigma(\mathrm{d}(f \circ H^{-1} \circ \varphi_3, U)) \in \Pi_4(S^3)$ y del hecho de que $\Sigma([h]) \neq 0$, para $h: S^3 \longrightarrow S^2$ si y solamente si $\gamma(h)$ es impar, siendo γ el invariante de Hopf, y del Lema IV.1.26.∎

Técnicas análogas a las utilizadas en la Prop. IV.1.23, se pueden emplear mediante el grado definido en el capítulo II.

Sean E un espacio vectorial real normado,

$B^E(0) = \{x\in E : \|x\|<1\}$ y $S(E) = S = \{x\in E : \|x\|=1\}$ y sea $T: S^{k-1}\times S \longrightarrow E$ una aplicación compacta (también puede ser contemplado el caso T γ-condensante).

Consideremos $\hat{T}: \bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0) \longrightarrow E$ una extensión compacta de T (siempre se puede conseguir en virtud del Teorema de Dugundji) y $\psi: \bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0) \longrightarrow R$ una aplicación compacta tal que $\psi(\bar{B}^k(0)\times S)\subset R^-$ y $\psi(S^{k-1}\times\bar{B}^E(0))\subset R^+$ y $\psi^{-1}(0) = S^{k-1}\times S$.

Si $f: S^{k-1}\times S \longrightarrow E\setminus\{0\}$ es una aplicación continua de la forma $f(\lambda,x) = x-T(\lambda,x)$ y definimos $F: \bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0) \longrightarrow R\times E$ por $F(\lambda,x) = (\psi(\lambda,x), x-\hat{T}(\lambda,x))$, se tiene que $F(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,x) = (\lambda_k,x)-(\lambda_k-\psi(\lambda,x),\hat{T}(\lambda,x))$ $(\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k))$, la aplicación $\bar{T}: \bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0) \longrightarrow R\times E$ definida por $\bar{T}(\lambda,x) = (\lambda_k-\psi(\lambda,x),\hat{T}(\lambda,x))$ es compacta, dado que $\bar{T}(\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0))\subset[-a,a]\times\overline{\hat{T}(\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0))}$ para algún $a\in R^+$ y por tanto está definido $\hat{\chi}([f]) = d(F,B^k(0)\times B^E(0)) \in \Pi_{k-1}$ $(F: (\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0),\partial(\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E(0))) \longrightarrow (R\times E, R\times E\setminus\{0,0\}))$.

Al igual que en el caso de dimensión finita $d(F,B^k(0)\times B^E(0))$ no depende ni de ψ ni de $\hat{T}$.

Proposición IV.1.28

Sean $T: R^k\times E \longrightarrow E$ una aplicación completamente continua, $f: R^k\times E \longrightarrow E$ definida por $f(\lambda,x) = x-T(\lambda,x)$. Supongamos que $f(\lambda,0)=0$ si $\lambda\in R^k$ (lo cual es equivalente a decir que $T(\lambda,0)=0$ si $\lambda\in R^k$) y que $f(S^{k-1}\times(\bar{B}^E(0)\setminus\{0\}))\subset E\setminus\{0\}$ (en este caso $f: S^{k-1}\times S \longrightarrow E\setminus\{0\}$). Si $\hat{\chi}([f])\neq 0$, existe $\lambda_0\in\bar{B}^k(0)$ punto de bifurcación de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.

Demostración

Para cada $m\in\mathbb{N}$, sea $\psi_m:\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E_{1/m}(0)\longrightarrow\mathbb{R}$ la aplicación continua definida por $\psi_m(x) = \|\lambda\|^2-m^2\|x\|^2$. Es claro que ψ_m es compacta, $\psi_m(\bar{B}^k(0)\times S^E_{1/m})\subset\mathbb{R}^-$, $\psi_m(S^{k-1}\times\bar{B}^E_{1/m}(0))\subset\mathbb{R}^+$ y $\psi_m^{-1}(0) = S^{k-1}\times S^E_{1/m}$.

Entonces, la aplicación $F_m:\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E_{1/m}(0)\longrightarrow\mathbb{R}\times E$ definida por $F(\lambda,x) = (\psi_m(\lambda,x),x-T(\lambda,x))$, cumple que $d(F_m,\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E_{1/m}(0)) = \hat{\chi}([f])\neq 0$ (I.1.10, II.1.7). Así, $f|_{\bar{B}^k(0)\times\bar{B}^E_{1/m}(0)}$ se puede G-complementar por $g_m=\psi_m$ y por IV.1.22, existe $\lambda_0\in\bar{B}^k(0)$ punto de bifurcación de la ecuación $f(\lambda,x)=0$∎

Bifurcación global

Sea $f:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que

a) $f(\lambda,0)=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}^k$

b) $\Delta = \{\lambda\in\mathbb{R}^k:D_xf(\lambda,0)\notin GL(\mathbb{R}^n)\}$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^k$.

Sea $\mathcal{S}$ la adherencia de todas las soluciones no triviales de la ecuación $f(\lambda,x)=0$.

Sea $\lambda_1\in\Delta$ y sea $\mathfrak{C}(\lambda_1)$ la componente conexa de $(\lambda_1,0)$ en $\mathcal{S}$. Supongamos que $\mathfrak{C}(\lambda_1)$ es acotado (y por tanto es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$). Se tiene que $\mathfrak{C}(\lambda_1)\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}\times\{0\}$, donde $\lambda_i\neq\lambda_j$ para $i\neq j$.

Proposición IV.1.29

Sea $f:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1, verificando las hipótesis anteriores. Si $\lambda_1\in\Delta$ y $\mathfrak{C}(\lambda_1)$ es acotado, se tiene que $\sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\chi}_{\lambda_\alpha}([f]) = 0$.

Demostración

Sean U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$, $r>0$ y $\rho>0$ tales que $\mathfrak{C}(\lambda_1)\subset U$, $\partial U\cap\mathcal{S}=\emptyset$, $U\cap(\mathbb{R}^k\times B^n_r(0)) = \bigcup_{i=1}^{m} B^k_\rho(\lambda_i)\times B^n_r(0)$, $\bar{B}^k_\rho(\lambda_i)\cap\bar{B}^n_\rho(\lambda_j)=\emptyset$ para $i\neq j$, $f(\bigcup_{i=1}^{m} S^{k-1}_\rho(\lambda_i)\times(\bar{B}^n_r(0)\setminus\{0\})) \subset \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

Consideremos $\psi: \bigcup_{i=1}^{m}\bar{B}^k_\rho(\lambda_i)\times\bar{B}^n_r(0)\longrightarrow\mathbb{R}$ aplicación continua tal que $\psi(\bigcup_{i=1}^{m} B^k_\rho(\lambda_i)\times S^{n-1}_r(0)) \subset (\leftarrow,0)$ y $\psi(\bigcup_{i=1}^{m} S^{k-1}_\rho(\lambda_i)\times B^n_r(0)) \subset (0,\rightarrow)$.

Sea $H = \mathfrak{C}(\lambda_1)\cap(\bigcup_{i=1}^{m}\bar{B}^k_\rho(\lambda_i)\times S^{n-1}_r(0)) = \mathfrak{C}(\lambda_1)\cap(\bigcup_{i=1}^{m} B^k_\rho(\lambda_i)\times S^{n-1}_r(0))$ subconjunto compacto de $\bar{U}$. Se tiene que $\psi(H)\subset(\leftarrow,0)$ y por tanto existe $m\in\mathbb{R}$ con $m<0$ tal que $\psi(H)\subset(\leftarrow,m]$. Así, existe $\tilde{\psi}:\mathfrak{C}(\lambda_1)\setminus(\bigcup_{i=1}^{m} B^k_\rho(\lambda_i)\times B^n_r(0))\longrightarrow(\leftarrow,m]$ extensión continua de $\psi|_H$. Tenemos, por tanto, definida una función continua $\bar{\psi}:\mathfrak{C}(\lambda_1)\cup(\bigcup_{i=1}^{m}\bar{B}^k_\rho(\lambda_i)\times\bar{B}^n_r(0))\longrightarrow\mathbb{R}$ donde $\bar{\psi}|_{\mathfrak{C}(\lambda_1)\setminus(\bigcup_{i=1}^{m} B^k_\rho(\lambda_i)\times B^n_r(0))}=\tilde{\psi}$ y $\bar{\psi}|_{\bigcup_{i=1}^{m}\bar{B}^k_\rho(\lambda_i)\times\bar{B}^n_r(0)}=\psi$. Finalmente, sea $\psi_1:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ una extensión continua de $\bar{\psi}$. Consideremos $(f,\psi_1):\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, es claro que $(f,\psi_1)(\partial U)\subset\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ y en consecuencia está definido $d((f,\psi_1),U)\in\Pi_{n+k}(S^{n+1})$. Además, $(f,\psi_1)^{-1}(0)\subset\bigcup_{i=1}^{m} B^k_\rho(\lambda_i)\times B^n_r(0)$ de donde se deduce que

$d((f,\psi_1),U) = d((f,\psi_1)|_{\bigcup_{i=1}^{m}\overline{B}_\rho^k(\lambda_i)\times\overline{B}_r^n(0)}, \bigcup_{i=1}^{m}B_\rho^k(\lambda_i)\times B_r^n(0))$ y como $B_\rho^k(\lambda_i)\times B_r^n(0)$ están separados por hiperplanos, podemos asegurar que

$$d((f,\psi_1),U) = d((f,\psi_1)|_{\bigcup_{i=1}^{m}\overline{B}_\rho^k(\lambda_i)\times\overline{B}_r^n(0)}, \bigcup_{i=1}^{m}B_\rho^k(\lambda_i)\times B_r^n(0)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} d((f,\psi_1)|_{\overline{B}_\rho^k(\lambda_i)\times\overline{B}_r^n(0)}, B_\rho^k(\lambda_i)\times B_r^n(0)) = \sum_{i=1}^{m}\hat{\chi}_{\lambda_i}([f]).$$

A la vista de esta igualdad, debemos probar que $d((f,\psi_1),U)=0$. Si $d((f,\psi_1),U)\neq 0$, se tendría que la aplicación $\psi_1:(f^{-1}(0)\cap\overline{U}, f^{-1}(0)\cap\partial U)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{0\})$ sería 0-epi en $f^{-1}(0)\cap\overline{U}$ lo cual es absurdo puesto que $f^{-1}(0)\cap\partial U = \bigcup_{i=1}^{m}S_\rho^{k-1}(\lambda_i)\times\{0\}$ y ψ_1 tiene signo constante allí.∎

El siguiente corolario es la observación 4.3 de [15] (pag. 71).

Corolario IV.1.30

En las condiciones anteriores de $f:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, si $\hat{\chi}_{\lambda_1}([f])\neq 0$ se tiene que $\mathfrak{C}(\lambda_1)$ es no acotada o existe $\lambda_2\in\Delta\setminus\{\lambda_1\}$ tal que $(\lambda_2,0)\in\mathfrak{C}(\lambda_1)$.

IV.2 APLICACION DEL GRADO GENERALIZADO AL ESTUDIO DE LOS NUMEROS DE ENLACE DE ESFERAS.

Definición IV.2.1

Un *enlace de tipo* (p_1,p_2) en $\mathbb{R}^m$, es una inmersión difeomórfica $L:S^{p_1}\cup S^{p_2}\longrightarrow\mathbb{R}^m$, donde S^{p_1} y S^{p_2} se suponen disjuntas. Mas generalmente una *aplicación de enlace* es una aplicación continua $f:S^{p_1}\cup S^{p_2}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ sujeta a la condición $f(S^{p_1})\cap f(S^{p_2})=\emptyset$.

Dos enlaces L_0 y L_1, del mismo tipo, se dice que son homótopos, si existe una homotopía continua $\bar{L}:(S^{p_1}\cup S^{p_2})\times I\longrightarrow\mathbb{R}^m$ tal que $\bar{L}_0=L_0$, $\bar{L}_1=L_1$ y $\bar{L}_t$ es un enlace para todo $t\in I$.

Dado un enlace $L:S^{p_1}\cup S^{p_2}\longrightarrow\mathbb{R}^m$, se puede definir una aplicación continua $\phi:S^{p_1}\times S^{p_2}\longrightarrow S^{m-1}$ por $\phi(x,y)=\dfrac{L(y)-L(x)}{\|L(y)-L(x)\|}$.
Sea $\alpha(L)=[\phi]\in[S^{p_1}\times S^{p_2},S^{m-1}]$. Es claro que si L_0 y L_1 son dos enlaces homótopos, se tiene que $\alpha(L_0)=\alpha(L_1)$ y por tanto $\alpha(L)$ es un invariante de la clase de homotopía del enlace L.

Si $p_1+p_2=m-1$, el grado de ϕ (como aplicación continua entre variedades) caracteriza $[\phi]$ y en virtud de lo observado en el Capítulo III, párrafo 3, $\alpha(L)=[\phi]$ puede ser considerado como un elemento de $\Pi_{p_1+p_2}(S^{m-1})$.

Si $p_1+p_2>m-1$, siguiendo el argumento dado en [25] (pag. 376) también puede considerarse $\alpha(L) = [\phi] \in \Pi_{p_1+p_2}(S^{m-1})$ ya que $[S^{p_1}\times S^{p_2}, S^{m-1}]\approx[S^{p_1+p_2}, S^{m-1}]$ (podrían también usarse los resultados del capítulo III, párrafo 3 si p_1 ó p_2 son menores que $m-2$, puesto que $S^{p_1}\times S^{p_2}$ es $(p_1+p_2-(m-1))$-conexo y $m-1\geq(p_1+p_2-(m-1)+2)$).

A continuación vamos a definir $\alpha(L)$ mediante el grado generalizado establecido en el Capítulo I, de manera natural. Para ello necesitamos introducir algunas notaciones, así como algunos resultados previos. Los resultados que posteriormente demostraremos involucran teoría de cohomotopía y los previos que se necesitarán están contenidos en el Capítulo 0.

Consideremos $\varphi: S^{p_1}\times S^{p_2}\longrightarrow S^{p_1+p_2+1}$ definida por $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x,y)$. Se tiene que φ es una inmersión difeomórfica y $\varphi(S^{p_1}\times S^{p_2})\subset S^{p_1+p_2+1}\setminus\{q\}$.

Consideremos las aplicaciones $H_1, H_2: S^{p_1+p_2+1}\longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $H_1(x,y) = \|x\|^2$ y $H_2(x,y) = \|y\|^2$ ($x\in\mathbb{R}^{p_1+1}$, $y\in\mathbb{R}^{p_2+1}$ y $S^{p_1+p_2+1}\subset\mathbb{R}^{p_1+1}\times\mathbb{R}^{p_2+1}$). Como $1/2 \in (\text{v.r.})(H_1)\cap(\text{v.r.})(H_2)$, se verifica que $M_1=H_1^{-1}(\longleftarrow, 1/2]$ y $M_2=H_2^{-1}(\longleftarrow, 1/2]$ son subvariedades de $S^{p_1+p_2+1}$, cuyo borde $\partial M_1=\partial M_2$ es $\varphi(S^{p_1}\times S^{p_2})$. Además, M_1 es difeomórfica a $\bar{B}^{p_1+1}(0)\times S^{p_2}$ por el difeomorfismo

$(x,y) \longmapsto (\sqrt{2}x, \frac{y}{\|y\|})$ y M_2 lo es a $S^{p_1} \times \bar{B}^{p_2+1}(0)$ por $(x,y) \longmapsto (\frac{x}{\|x\|}, \sqrt{2}y)$.

Consideremos U, subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $f\colon (\bar{U}, \partial U) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ una aplicación continua, $\varphi_{n+k}\colon \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow S^{n+k} \setminus \{q\}$ y $\varphi_n\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \setminus \{q'\}$ como hasta ahora. Sea $U' = \varphi_{n+k}(U)$ y $g\colon \partial U' \longrightarrow S^{n-1}$ la aplicación continua definida por

$$g(x) = \frac{(f \circ \varphi_{n+k}^{-1})(x)}{\|(f \circ \varphi_{n+k}^{-1})(x)\|}.$$

Supongamos que los grupos de cohomotopía $\Pi^{n-1}(\partial U')$, $\Pi^n(\bar{U}', \partial U')$, $\Pi^n(S^{n+k}, S^{n+k} \setminus U')$ y $\Pi^n(S^{n+k})$ están definidos.

Lema IV.2.2

En las condiciones anteriores, $d(f,U) = -\Phi^{\bullet}([g])$, donde $\Phi^{\bullet}$ es la composición de los homomorfismos

$$\Pi^{n-1}(\partial U') \xrightarrow{\ \delta\ } \Pi^n(\bar{U}', \partial U') \xrightarrow{(e^{\bullet})^{-1}} \Pi^n(S^{n+k}, S^{n+k} \setminus U') \xrightarrow{\ j^{\bullet}\ } \Pi^n(S^{n+k}) \cong$$

$\cong \Pi_{n+k}(S^n)$, donde $j\colon S^{n+k} \hookrightarrow (S^{n+k}, S^{n+k} \setminus U')$, $e\colon (\bar{U}', \partial U') \hookrightarrow (S^{n+k}, S^{n+k} \setminus U')$ son las inclusiones. (Observese que, por 0.1.6 *b*), $e^{\bullet}$ es un isomorfismo).

Demostración

Como $g\colon \partial U' \longrightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es una aplicación continua, existe $\hat{g}\colon S^{n+k} \longrightarrow S^n$ extensión continua de g tal que $\hat{g}(\bar{U}') \subset E^n_+$, $\hat{g}(S^{n+k} \setminus U') \subset E^n_-$ y $\hat{g}(S^{n-1}) = \partial U'$. Si $r\colon S^n \longrightarrow S^n$ es la aplicación definida por $r(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = r(x_1,\dots,x_n,-x_{n+1})$, es fácil comprobar que $d(f,U) = [r\circ\hat{g}] = [\hat{g}]$ (I.0.1). Por tanto, lo que hay que demostrar es que $\Phi^{*}([g]) = [\hat{g}]$. Se tiene que $\delta([g]) = [\tilde{g}]$, donde $\tilde{g}(x) = \bar{g}(x)+\theta(x)e_{n+1}$, con $\bar{g}:\bar{U}'\longrightarrow\mathbb{R}^n$ extensión continua de g y $\theta:\bar{U}\longrightarrow[0,1]$ aplicación continua tal que $\theta^{-1}(0)=\partial U'$ (0.1.5). Es claro que $\tilde{g}:(\bar{U}'\,\partial U')\longrightarrow(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},\mathbb{R}_-^{n+1}\setminus\{0\})$ es una aplicación continua. Sea $G:\bar{U}'\times I\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ la homotopía continua definida por $G(x,t) = t\hat{g}(x)+(1-t)\tilde{g}(x)$. Es inmediato que $G(\bar{U}'\times I)\subset\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ y $G(\partial U'\times I)\subset\mathbb{R}_-^{n+1}\setminus\{0\}$. Como consecuencia se tiene una homotopía continua $G:(\bar{U}'\times I,\partial U'\times I)\longrightarrow(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},\mathbb{R}_-^{n+1}\setminus\{0\})$ tal que $G_0=\tilde{g}$ y $G_1=\hat{g}$, esto es, $\delta([g]) = [\tilde{g}] = [\hat{g}|_{\bar{U}'}]$. Por tanto $((e^{*})^{-1}\circ\delta)([g]) = (e^{*})^{-1}([\hat{g}|_{\bar{U}'}])$, y como $\hat{g}:(S^{n+k},S^{n+k}\setminus U')\longrightarrow(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},\mathbb{R}_-^{n+1}\setminus\{0\})$ se tiene que $((e^{*})^{-1}\circ\delta)([g]) = [\hat{g}]$ y así $\Phi^{*}([g]) = (j^{*}\circ(e^{*})^{-1}\circ\delta)([g]) = [\hat{g}]$.■

Definición IV.2.3

Sean $L:S^{p_1}\cup S^{p_2}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ un enlace, $\phi:S^{p_1}\times S^{p_2}\longrightarrow S^{m-1}$ definida por $\phi(x,y) = \dfrac{L(y)-L(x)}{\|L(y)-L(x)\|}$ y $S = \varphi^{-1}_{p_1+p_2+1}(\varphi(S^{p_1}\times S^{p_2}))$. S es una subvariedad compacta y sin borde de $\mathbb{R}^{p_1+p_2+1}$ de dimensión p_1+p_2 y por tanto existe un subconjunto abierto y acotado, U, de $\mathbb{R}^{p_1+p_2+1}$ tal que $\partial U=S$. Se define $\alpha'(L) = d(\tilde{\phi},U)$, donde $\tilde{\phi}:\bar{U}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es una extensión continua, cualquiera, de $\phi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi_{p_1+p_2+1}:\partial U\longrightarrow S^{m-1}$ (observemos que $\alpha'(L)\in\Pi_{p_1+p_2+1}(S^m)$ y por I.0.2 es independiente de la extensión continua que se elija de $\phi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi_{p_1+p_2+1}$). De hecho lo que se ha definido es una aplicación $d\colon [S^{p_1}\times S^{p_2}, S^{m-1}] \longrightarrow \Pi_{p_1+p_2+1}(S^m)$ ya que $d(\tilde{\phi}, U)$ solo depende de la clase de homotopía de ϕ.

Proposición IV.2.4

En las condiciones anteriores, $d\colon [S^{p_1}\times S^{p_2}, S^{m-1}] \longrightarrow \Pi_{p_1+p_2+1}(S^m)$ es un homomorfismo si $p_1+p_2<2m-3$ y es un isomorfismo si $p_1\leq m-2$ y $p_2\leq m-2$. En consecuencia, si $p_1\leq m-2$ y $p_2\leq m-2$, $\alpha'(L)$ juega el mismo papel que $\alpha(L)\in \Pi_{p_1+p_2}(S^{m-1})$ definido al comienzo del apartado IV.2.

Demostración

Usando el Lema IV.2.2 y las propiedades de φ, M_1 y M_2 es claro que $M_2 = \varphi_{p_1+p_2+1}(\bar{U})$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\Pi^{m-1}(S^{p_1}\times S^{p_2}) \arrow[r, "-d"] \arrow[d, "(\varphi^{-1})^*"', "\approx"] & \Pi^{m}(S^{p_1+p_2+1}) = \Pi_{p_1+p_2+1}(S^m) \\
\Pi^{m-1}(\varphi(S^{p_1}\times S^{p_2})) \arrow[d, "\delta"'] & \\
\Pi^{m}(M_2, \varphi(S^{p_1}\times S^{p_2})) \arrow[r, "(e^*)^{-1}", "\approx"'] & \Pi^{m}(S^{p_1+p_2+1}, S^{p_1+p_2+1}\setminus \mathring{M}_2) \arrow[uu, "j^*"']
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, el difeomorfismo $\alpha\colon (M_2, \varphi(S^{p_1}\times S^{p_2})) \longrightarrow (S^{p_1}\times \bar{B}^{p_2+1}(0), S^{p_1}\times S^{p_2})$, definido por

$\alpha(x,y) = (\frac{x}{\|x\|}, \sqrt{2y})$, induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{m-1}(S^{p_1}\times S^{p_2}) & \xrightarrow{\delta} & \Pi^{m}(M_2,\varphi(S^{p_1}\times S^{p_2})) \\ \alpha^*\uparrow\approx & & \approx\uparrow\alpha^* \\ \Pi^{m-1}(\varphi(S^{p_1}\times S^{p_2})) & \xrightarrow{\delta} & \Pi^{m}(S^{p_1}\times \bar{B}^{p_2+1}(0), S^{p_1}\times S^{p_2}) \end{array}$$

Por otro lado, se tiene que $S^{p_1+p_2+1}\setminus\mathring{M}_2 = M_1$. Como $\dim(S^{p_1}\times S^{p_2}) = p_1+p_2$, $\Pi^{m-1}(S^{p_1}\times S^{p_2})$ tiene estructura de grupo si $2(m-1)-1>p_1+p_2$, es decir, si $2m-3>p_1+p_2$. De la misma manera, de $\dim(S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0)\setminus S^{p_1}\times S^{p_2}) = p_1+p_2+1$, $\dim(\mathring{M}_2) = p_1+p_2+1$ y $\dim(S^{p_1+p_2+1}) = p_1+p_2+1$, se tiene que los grupos de cohomotopía anteriores están definidos si $2m-3>p_1+p_2$ y en consecuencia d es un homomorfismo si $p_1+p_2<2m-3$.

Consideremos ahora la sucesión exacta de cohomotopía del par $(S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0), S^{p_1}\times S^{p_2})$.

$$\cdots\cdots\longrightarrow \Pi^{m-1}(S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0)) \longrightarrow \Pi^{m-1}(S^{p_1}\times S^{p_2}) \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} \Pi^{m}(S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0), S^{p_1}\times S^{p_2}) \longrightarrow \Pi^{m}(S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0)) \longrightarrow\cdots$$

Como $S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0)$ es del tipo de homotopía de S^{p_1}, $\Pi^{m-1}(S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0))$ y $\Pi^{m}(S^{p_1}\times\bar{B}^{p_2+1}(0))$ que ya sabíamos están definidos, son nulos en ambos casos si $p_1\leq m-2$. En consecuencia, δ

es un isomorfismo si $p_1 \leq m-2$.

Ahora tomamos la sucesión exacta de cohomotopía del par $(S^{p_1+p_2+1}, M_1)$.

$$\cdots\cdots \longrightarrow \Pi^{m-1}(M_1) \xrightarrow{\delta} \Pi^{m}(S^{p_1+p_2+1}, M_1) \xrightarrow{j^*}$$
$$\xrightarrow{j^*} \Pi^{m}(S^{p_1+p_2+1}) \longrightarrow \Pi^{m}(M_1) \longrightarrow \cdots\cdots$$

Como M_1 es difeomorfa a $\bar{B}^{p_1+1}(0) \times S^{p_2}$, es del tipo de homotopía de S^{p_2} y por tanto $\Pi^{m-1}(M_1)$ y $\Pi^{m}(M_1)$ son nulos si $p_2 \leq m-2$. Por consiguiente, j^* es isomorfismo si $p_2 \leq m-2$. Hemos visto que si $p_1 \leq m-2$ y $p_2 \leq m-2$ d es un isomorfismo.∎

BIBLIOGRAFIA

- [1].-J.C.Alexander and Stuart S. Antman.

"Global and local behavior of Bifurcating Multidimensional Continua of Solutions for multiparameter Nonlinear Eigenvalue Problems".

Arch. Rat. Mec. and Anal. 1981, vol. 76, nº 4, 339-354.

-[2].-J.C.Alexander and James A. Yorke.

"The Implicit Function theorem and the Global Methods of Cohomology".

Journal of Functional Analysis. 1976, 21, 330-339.

-[3].-Michael G.Crandall and Paul H.Rabinowitz.

"Bifurcation from Simple Eigenvalues".

Journal of Functional Analysis. 1971, 8, 321-340.

-[4].-Michael G.Crandall and Paul H.Rabinowitz.

"Nonlinear Sturm-Liouville Eigenvalue Problems and Topological degree".

Journal of Mathematics and Mechanics. 1970, Vol. 19, nº 12, 1083-1102.

-[5].-K.Deimling.

"Nonlinear Functional Analysis".

Springer Verlag. 1985.

-[6].-A. Dold.

"Lectures on Algebraic Topology".

Springer Verlag. 1972.

-[7].-J. Dugundji and A. Granas.

"Fixed Points Theory".

Polish Scientific Publishers. Warzawa 1982.

-[8].-R. Engelking.

"Dimension Theory".

North Holland. 1978.

-[9].-R. Engelking.

"General Topology".

Warszawa: Polska Akad. Nauk. Inst. Matem. 1977.

-[10].-R. Fenn and D. Rolfsen.

"Spheres may link homotopically in 4-space".

J. London Math. Soc. 1986, (2) 34, 177-184.

-[11].-P. M. Fitzpatrick, I. Massabo and J. Pejsachowicz.

"Global Several-Parameter Bifurcation and Continuation Theorems: a Unified Approach Via Complementing Maps".

Math. Ann. 1983, 263, 61-73.

-[12].-P. M. Fitzpatrick, I. Massabo and J. Pejsachowicz.

"On the Covering Dimension of the Set of Solutions of Some Nonlinear Equations".

Trans. Am. Math. Soc. 1986, 296, nº 2, 777-798.

-[13].-Fucks and Rohlin.

"Beginner's Course in Topology".

Mc Graw Hill. 1966.

-[14].-K.Geba, J.Jodel and W.Marzantowicz.

"An S^1-degree and the Fuller index".

Preprint.

-[15].-K.Geba, I.Massabo and A.Vignoli.

"Generalized Degree and Bifurcation".

Nonlinear Functional Analysis and its Applications. 1986, 55-73.

-[16].-K.Geba.

"Cohomotopy Groups and Bifurcation".

Topological Methods in Bifurcation Theory. Les Presses de l'Université de Montreal. 1985.

-[17].-Morris W.Hirsch.

"Differential Topology".

Springer Verlag. 1976.

-[18].-S.T.Hu.

"Homotopy Theory".

Academic Press. 1959.

-[19].-J.Ize, I.Massabo, J.Pejsachowicz and A.Vignoli.

"Structure and Dimension of Global Branches of Solutions of Multiparameter Nonlinear Equations".

Trans. Americ. Math. Soc. 1985, 291, nº 2, 383-435.

-[20].-J. Ize.

"Necessary and Sufficent Conditions for Multiparameter Bifurcation".

Rocky Mountain J. of Math. 1988, V.18, nº 2, 305-337.

-[21].-Michel A. Kervaire.

"An Interpretation of G:Whitehead's Generalization of Hopf's Invariant".

Annals of Math. 1959, 69, nº 2, 345-365.

-[22].-N.G. LLoyd.

"Degree Theory".

Cambridge University Press. 1978.

-[23].-J. Margalef y E. Outerelo.

"Topología diferencial".

C.S.I.C. 1988.

-[24].-M. García, J. Margalef, C. Olano, E. Outerelo y J.L. Pinilla.

"Topología". Tomos I, II, III, IV y V.

Alhambra. 1975.

-[25].-W.S. Massey and D. Rolfsen.

"Homotopy Classification of Higher-Dimensional Links".

Indiana University Math. Journal. 1985, 34, nº 2, 375-391.

-[26].-W.S. Massey.

"Singular Homology Theory".

Springer Verlag. 1980.

-[27].-J.Milnor and James D.Stasheff.
"Characteristic Classes".
Princeton University Press. 1974.

-[28].-J.Milnor.
"Lectures on the h-Cobordism Theorem".
Princeton University Press. 1965.

-[29].-L.S.Pontryagin.
"Smooth manifolds and Their Applications in Homotopy Theory".
Amer. Math. Soc. Translations. 1959, 11, 1-114.

-[30].-C.P.Rourke and B.J.Sanderson.
"Introduction to Piecewise-Linear Topology".
Springer Verlag. 1972

-[31].-Seminario de Topología. (Tomos I al XII).
Ftad. Matemáticas U.C.M.. 1970-75.

-[32].-E.Spanier.
"Borsuk's Cohomotopy Groups".
Annals of Math. 1949, 50, nº 1, 203-245.

-[33].-E.Spanier.
"Algebraic Topology".
Mc Graw Hill. 1966.

-[34].-R.E.Stong.
"Notes on Cobordism Theory".
Princeton University Press. 1968.

-[35].-G.W.Whitehead.

"A Generalization of the Hopf Invariant".

Annals of Math. 1950, 51, $n^{\underline{o}}$ 1, 192-237.